Investigação em Educação Matemática

Comunicação no Ensino e na Aprendizagem da Matemática

2010

Editores:

José Manuel Matos

António Domingos

Carlos Carvalho

Paula Cristina Teixeira

Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática

Investigação em Educação Matemática – 2010
Comunicação no Ensino e na Aprendizagem da Matemática

Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática

Editora: Leonor Santos
Editores convidados: José Manuel Matos, António Domingos, Carlos Carvalho, Paula Cristina Teixeira

Outubro de 2010
Tiragem: 150 exemplares
Numero depósito legal: 335398/11
ISSN: 2182-0023

Este trabalho é financiado por Fundos FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade – COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projecto «PEst-OE/CED/UI2861/2011»

Edição em:
Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
Campus da Caparica
2829-516 Caparica, Portugal
Tel: +351 212948383
e-mail: uied@fct.unl.pt

Capa, impressão e acabamento:
Várzea da Rainha Impressores SA.
Estrada Nacional 8, n.6ª
2510-082 Óbidos, Portugal
Tel: +351 262098008, Fax: +351 262098582
Composição: Rodrigo Figueiredo

ÍNDICE

Apresentação

Esta edição incorpora versões revistas de conferências plenárias e de comunicações aceites para o Encontro de Investigação em Educação Matemática que decorreu entre 17 e 18 de Abril de 2010 na Costa da Caparica.

On the communication of proof

Joanna Mamona-Downs
Department of Mathematics, University of Patras, Greece

Abstract

This paper discusses the role of articulation in fostering the processes of solving a mathematical task. Articulation is taken as indicating that a phase of argumentation has been enunciated, and by its enunciation, is settled on. In particular, a general framework is put forward where acts of articulation determine four stages in the making of a solution. Two different models are made within this framework, and illustrations are given. For both models, the last stage involves formulating a presentation of a solution or proof. The idea of proof presentation prompts a discourse about the character of proof vis-à-vis secure argumentation. One facet of this discourse concerns the issue of modelling intuitive reasoning into a well-defined mathematical environment; it is contended that students must have an experience of such modelling to appreciate the character and the need of proof.

Despite the huge expansion of the different perspectives taken by mathematics education community recently, the issue of meaning still lies at the heart. The old debate whether teaching should aim to imbue students with intuitive understanding or teaching should stress formalization continues. The debate might be thought rather passé nowadays, but its influence persists behind whatever we write as educators. Educators are now more cautious not to make extreme positions on the question: Does meaning in mathematics arise in the course of (re)-inventing mathematics, or is it evinced by its presentation? However, educational researchers are far from being in consensus concerning the position they should take within the spectrum that lies between.

There are now quite a few educational papers addressed to the practices of professional mathematicians when they do their research. The rationale usually is that these could be made ‘exemplars’ that could be taken to guide instructional programs aiming to induce good working and studying habits in students (e.g. Burton, 1999). These papers tend to emphasize that when presented with an unfamiliar task, a mathematician can go through an initial phase that is highly exploratory in character, where many provisional ideas are floated. This supports the stance that one should adopt a style of teaching promoting students to undertake preliminary investigations. This is fine, but fails to give a full portrait of the mathematician’s work. In particular, typically the mathematician devotes much of his time reading colleagues’ publications; furthermore, he wants to extract the information he needs in an efficient way. The writer of an article would oblige by being concise and exact, and a major factor in this would be the existence of a shared technical vocabulary. So from an initial phase where the mathematician has a problem to solve, he ends up (typically) with a theorem and a proof. This is the ‘public’ output of his endeavours. All the supporting thinking that led him to the proof is eventually suppressed. What does this signify educationally if we want students’ to emulate this particular aspect of the professional mathematician’s practices?

In this respect, this paper will consider stages that students pass in making a solution of a mathematical task. The final step will be the formulation of what we call a proof presentation. The role of the proof presentation surpasses the needs of justification. What is in issue is that a proof presentation not only ensures the truth of the result, but also it serves as a validation of the form of the proof itself. It might seem that we are making a fine line here. But what we are aiming for is something beyond conviction; we are seeking for explicit mathematical tools that allow full expression of the proof. (Indeed, there are extant papers that examine the different roles taken by argument and proof. For example, some researchers are interested in the ‘continuity’ or otherwise of the two (e.g. Duval, 1995; Pedemonte, 2007). We do not take the phrase ‘full expression’ above as being a synonym of logical rigour. We will try to portray this difference in terms of an act of articulation; even if a proof essentially is held in the mind, one might not still have the ‘right’ terminology and the functional tools to communicate it in a concrete way.

Once introducing the idea of articulation allowing us to distinguish between secure argumentation from proof, we propose to use the same idea to identify different stages in the whole enterprise of producing a solution or proof. We contend that a new stage is initialized when the previous stage is fully articulated; the articulation seals the current state of affairs, and hence provides a firm base for new deliberations that might have a different character.

The paper addresses the following issues:

What is the role of communication in the process of creating the strategy behind a proof? In particular, can we usefully identify stages of this process via the notion of articulation?

What distinguishes an argument that is generally accepted as being secure from a strict proof? Indeed, is there a distinction? Is the very notion of a proof artificial?

What is the relationship between articulation and meaningfulness? In particular, how can we transform intuitive ideas into an acceptable mathematical form?

We start with a short example that illustrates how we distinguish between what we call secure argumentation from proof, hoping that this will help the reader to understand the ‘spirit’ of the paper. This is followed by a more general section that deals with the role of communication whilst doing mathematics, especially focusing on the notion of articulation. Ensuing this, we devote a section to two examples of tasks whose solution are broken up into stages ‘closed’ by acts of articulation. The paper then will turn more specifically towards proof and proof presentation with a general section on proof, and a section preceding the epilogue that gives examples illustrating how intuitive argumentation can be modelled and presented into strict mathematical language.

A MOTIVATING EXAMPLE

In project work, two students were given the task:

> Let n be a natural number. Suppose that rn is the highest power of 2 dividing the factorial of 2n. Find rn.
>
> Their written response (translated from Greek) is:
>
> "We know that from the numbers 1, 2, 3, …, 2^n, there are 2^{n-1} numbers which are divisible by 2. We note that from the numbers 1, 2, 3, … , 2^{n-1}, there are 2^{n-2} numbers that are divisible by 2. We note that from the numbers 1, 2, 3, …, 2^{n-2}, there are 2^{n-3} numbers that are divisible by 2. Continuing to the end we have that $2^n! = 1.2.3…2^n$ is divisible by 2 raised to the power
>
> $$2^{n-1} +2^{n-2} +2^{n-3} +… +2^2 +2+1.$$
>
> This means that r_n equals 2^n -1."

In an interview, one of the students was adamant that the response constitutes a proof.

No doubt, the students had securely thought through in their minds an approach. The problem is in articulation. They produce a succession of lists of numbers without being clear why they appear. In order to clarify this, they would have to refine the language that is used.

However, before saying definitely what the students stated does not qualify as a proof, one has to take in mind the following. Statements and inferences found and accepted in a presentation of a proof can assume much mental argumentation, even if it is hidden away. However, we contend that one necessary criterion for a ‘proper’ exposition of a proof is this: any construct that is explicitly introduced has to be defined to expound its usage. The student’s claim that they have produced a proof certainly fails this criterion.

This example illustrates two related topics taken up in the paper; the role of articulation in forming solutions/proof, and what is required for a proof presentation to be valid.

THE ROLE OF COMMUNICATION IN MATHEMATICAL THINKING

Communication in general has to be situated by the people who are communicating, the subject that is discussed, a protocol of conduct, a control of what is relevant, and the stimuli or sources that motivated the communication at the first place. Communication is closely associated to the notion of language. Even communication that is conveyed non-verbally is often accredited to a form of language, such as sign language or body language. A language could be thought of as the channel that allows and structures communication. Much of the educational research concerning communication and language involves the debate about the role the teacher should take. Put it simply, the question is should the teacher be mainly the transmitter and the students the receptors (the Vygotsky school), vice-versa (the constuctivist school), or engaged in a dialogue (the interactionist school)? (See, e.g., Sierpinska, 1998.)

Also prominent is the discussion concerning the linkage of language with notions such as representation, analogies, metaphors and the ilk (see, for example, the collection of papers edited by English, 1997). There are problems when such ideas are analysed closely; in the end there can be an uncertain interchangability between what is represented (say) with the representation itself. For example, some researchers note circularity in employing a representation targeted to help to develop a concept, whilst the representation itself depends on the a-priori appreciation of the conceptual 'material' (e.g., Bereiter, 1985).

Pirie (1998) gives a list of means of mathematical communication. She lists:

Ordinary language.

Mathematical verbal language (encompassing both spoken and written wording).

Symbolic language.

Visual representation.

Unspoken but shared assumptions.

Quasi-mathematical language.

This characterization is useful in initiating discussion on issues concerning communication. The inclusion of the fifth item is interesting; it is not a form of communication by itself, but it can constitute an implicit support for communication at another level. Quasi-mathematical language referred to here does not necessarily imply dysfunction. It can refer to a lack of the sufficient vocabulary for the mathematical needs at hand, and to the kinds of communication that can arise under such limitations.

Communication is done through people collaborating or debating. Is it, then, meaningful to talk about self-communication? The term self-communication appears in Sfard (2001) but only in the situation where group discussion was taken as the norm, but individuals needed 'time off' to collate the collective output on their own. The idea of self-communication can make sense in broader contexts. Conscious executive control can seem to be an interior 'voice' that comments on the thinking at the operational level. Also there are means of communication, such as reading material in a textbook, involving only one person.

As we have seen above, the role of communication and language in the learning and teaching of mathematics can be discussed from many different angles. For the purposes of this paper, we restrict to one particular aspect, articulation. Articulation is concerned with creating the linguistic tools needed to expound mathematical ideas and argumentation. This is in accord with a definition of articulation found in Johnston-Wilder & Lee (2008). Articulation is an exercise to organize and expose those loose thoughts that make sense but are yet jumbled in the mind. Students when first confronted with an unfamiliar task tend to express themselves in an incoherent way; a first step to articulation is to make consistent linguistic conventions. It is a fairly common phenomenon for students to say that they 'see' that something holds but are not able to articulate how. If a student lacks a channel of expression, there is no direct evidence of his/her understanding to the outsider. Articulation aims at increasing clarity on what is already understood. Whilst it does not afford new argumentation by itself, it can elucidate the character of obstructions that occur in the line of reasoning. One then is in a better situation to think how the obstacles can be overcome. These thoughts usually lead to a more abstract understanding that ultimately needs a further level of articulation.

Who does the articulation? Principally, it is the solver or the person making a proof. The person who articulates is expressing an integral idea or position rather than tentative thoughts or observations that still have to be assimilated. Articulation is an individual act, the product of which may be communicated to others. We also include the idea of self-articulation; in self-articulation, you have sorted out something in your mind and style it as a kind of integral piece of personally-held knowledge. This knowledge allows a certain sense of detachment that is psychologically useful. Articulation has two facets; one processes the linguistic tools needed, the other stresses its product in terms of expression. Articulation might be held mentally, communicated verbally or written down.

Are students versed in articulation? The answer is: rarely. Students are used to address tasks in a direct way. Their working typically is divided into two parts: rough work and the presentation of a solution. The rough work is usually written in a very disjointed way, and when finished is put to the side. The presentation is mostly taken in a utilitarian manner. It seems a reasonable contention that, if the students were to articulate the rough work at several stages of a solution or proof, they would have a better chance to complete it. In this respect, it could well be useful for teachers to explain the art of articulation to their students and to encourage them to make their own expressions concerning 'the state of things', either before, alongside or after the 'official' presentation.

Now, an act of articulation has an expansive character; to put it colloquially, 'things have to be spelled out'. But producing too verbose explanation also raises problems. As the extent of the articulation increases, there arises a compensating need to condense previously processed information. Language again plays an essential part in achieving this. Technical terms are made such that whenever the term appears, some certain body of knowledge is automatically triggered. If this knowledge is well enough assimilated, the content and meaning of the term can be kept implicit within the argument without harming its precision. Even in abstract mathematics, many of the central definitions are given names; naming the object being defined often reflects its cognitive (or historical) roots (for a discussion of cognitive root, see Tall, McGowen & DeMarois, 2000). Symbolism has a similar role. It has two 'faces'; one face stresses the significance of what the symbol represents, the other face how the symbol can be manipulated in a symbolic system (c.f., the notion of procept, Gray & Tall, 1994).

On one hand, then, we have the need of articulation allowing expression of meaning, understanding and argumentation (Pimm, 1995), and on the other the need of compactification of language for efficient processing of mathematics. This duality will be the main aspect of communication dealt with in this paper. In this light, we will consider stages that occur in strategy making, including the formulation of proof presentation.

ARTICULATION AND STAGES IN SOLVING

Here we talk about the role of articulation at four stages in solving a mathematical task. The stages concern the genesis of initial thoughts, the expression of initial thoughts, how these thoughts can be accommodated in terms of mathematical tools, and the exposition of the solution/ proof. Such stages suggest some kind of 'completion' that has to be articulated before passing to the next. Hence each stage in solving is regarded to induce an associated stage of articulation. We mention two models below (though there may be other variants).

First model: when the solution can be seen through informally from the start.

1. How did I get to the situation that allowed me to conceive an informal approach?

2. The description of the informal approach.

3. The description of transferring the informal approach into an environment allowing the mathematical tools to prove the result.

4. The implementation of the proof.

Second model: when the solution evolves within a strict mathematical environment.

1. How did I think to link the task environment to a specific mathematical enabler, (i.e., a construct anticipated to support a basis from which the argument will be made)?

2. The explicit expression of this mathematical enabler.

3. The setting up of the mathematical tools and techniques to allow a local-level analysis.

4. The collation of the results and rendering the working into the exact wording of the original task.

For some tasks, the consideration of some of the stages would not be required. Also often the informal co-evolves with the formal, in which case both models would have to be refined. However, the situations described in the two models are certainly common enough for both to be carefully investigated. We illustrate each model by an example, but in the context of this paper more attention is put on the first model.

Task A (Illustrating model 1)

Let n be an even natural number, f be a bijection {1, . . ., n}-> {1, . . ., n}. State a necessary and sufficient condition on f such that

$$\sum_{i=1}^{n} |f(i) - i| \text{ is maximal.}$$

A Possible Strategy

Stage 1 (repressed):

The articulation of a formed strategy usually does not refer back to its formative thoughts. Hence we repress the first stage here but we remark on it at the end.

Stage 2:

The question may be interpreted as expressing the maximal total displacement possible caused by a permutation of n objects (equally spaced on a line segment). If we consider in isolation the ‘lower half’ of the numbers, i.e. the set L:={1, 2,…, n/2}, it seems likely that the maximum contribution in displacement would be caused by mapping these numbers onto the 'higher half' of the numbers, i.e. the set R:={(n/2)+1,…, n}. Moreover it is immaterial how this mapping is made. This choice forces us to map the higher half of the numbers onto the lower half of the numbers; similarly we assume this yields the maximal contribution in displacement that the set R could provide. If we maximize simultaneously the two separate ‘parts’, the whole must be also maximized.

In functional language then we conjecture that the maximum is achieved if and only if

f{1,2,…,n/2} = {(n/2)+1,…,n}

f{(n/2)+1,…,n} = {1,2,…,n/2} .

We go on to obtain mathematical tools that strengthen the conjecture.

Stage 3:
The summation to be maximized involves 2n numbers; each of 1,…, n appears twice. Of these numbers, n are taken positively, n negatively. Hence the maximum value of the summation ≤ (the biggest n terms added – the smallest n terms added), which is:

2.n + 2.(n-1) + … + 2. (n/2 +1) – 2.n/2 - … - 2.1

The bound is achieved exactly when f interchanges the bottom half with the upper.

Stage 4:
We are now in a position to prove the assertion. Algebraically,

$$\sum_{i\in L}|f(i)-i| \le \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n/2} j \quad \text{and} \quad \sum_{i\in R}|f(i)-i| \le \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n/2} j$$

where equality for both expressions occurs exactly when f(L) = R (and f(R) = L).

Then by adding the two expressions we have:

$$\sum_{i\in L}|f(i)-i| \le 2\left(\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n/2} j \right)$$

where equality holds whenever f(L) = R.

There are exactly $[(n/2)!]^2$ permutations that satisfy the last expression as an equality. (Further, with some simplifications it is easily shown that the value of the maximum is $n^2/2$).

REMARKS

Stage 1 of articulation

The problem is essentially solved as soon as you introduce the sets L and R. But how would you conjecture up L and R in the first place? The natural way to think about a function is how an element of the domain is associated to an element in the co-domain. A switch to consider how f would behave on a partition {L, R} of the domain is not so natural. How did we bring up this structure?

'How did you think of it' is often a difficult question to answer. Commonly it is not accommodated in the informal description of a tentative approach (and even more so in the final proof). If you have gained the 'insight' you no longer need the origins from which it arose. However, if you have to explain it to a classmate, say, it has to be articulated, and this act no doubt would be instructive to the explainer too.

The entrée to an argument is often supported by a range of dispersed thoughts. Many would have an explorative or provisional character. These thoughts have to be 'edited' and even elaborated in order to answer the question 'how did you think of it?' a posteriori. Such an undertaking, of course, would be personal. (Also, there are two states; pre-knowledge and post-knowledge. Explaining the pre-knowledge state from the post-knowledge state can have unreliable facets.)

One line for the present task could be as follows. We are asked a question concerning which members of a family of functions satisfy a certain condition. Asking 'which' invites a characterization of the relevant functions. Explorative work is made to produce some candidate functions that seem likely to satisfy the given condition. One which students often suggest we denote as f_1, where i is mapped to n-i+1 for all $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Another is f_2:

$f_2(i)$ is $i + n/2$ when $i \leq n/2$, but is $i - n/2$ when $i > n/2$.

Both f_1 and f_2 are geometrically motivated via the displacement representation; f_1 is a reflection around n/2, f_2 is influenced by a notion of translation applied separately on L and R, in opposite directions. From these geometric considerations, a common behaviour of f_1 and f_2 can be discerned; the 'lower half' of the numbers are mapped to the 'higher half' of the numbers, and vice-versa.

The initial stage of experimenting and trying out tentative ideas are repressed in the account of the solution because much of this work goes astray or is replaced by more powerful thoughts later. However, this phase of a solution either ends in failure or leads to a more consistent base to argue on. This base has to be articulated; in this particular case, we express the issue which permutations interchange the greatest half of the numbers with the least half vis-à-vis the given task.

Articulation involved in stage 2 and stage 3

In stage 2 a conjecture was made; the total displacement is maximized if and only if f interchanges the sets L and R. The conjecture was a strong one in the sense that it is articulated clearly and there is ample argumentation backing it up. Because of this, on the conceptual level there is little doubt that it holds, but it could still be criticized in that it does not refer explicitly to the mathematical tools allowing a proof. Stage 3 provides a suitable context that articulates the mathematical 'means' to make the argument more concrete. An upper bound of the total displacement is found; the problem is reduced to which functions take this upper bound. Obviously any function interchanging L and R (and no other) does this. Notice though that in forming the upper bound the sense of displacement is not really respected any more. Hence the intuitive ideas supporting the initial approach held in the mind have to be 'suspended' in order to handle the situation more analytically.

Stage 4 of articulation

Here an algebraic exposition is given. This could stand on itself as a proof presentation, if some definitions, like the sets L and R, are restated. The algebraic setting allows the mathematical tools to express it as a proof. Or does it? The statements appeal much to the previous informal work that is no longer conveyed explicitly. Because of this, the argumentation does not have the exact appearance of strict deductive reasoning; if you like, the leaps made are too extended. Hence we have a kind of 'intermediate' level of reasoning (between inductive and deductive). In the literature, such reasoning is called abductive (due to Pierce, 1902). It is drawn from a language that supports formal mathematics but allows a degree of informal expression and interpretation. From a different but related perspective, a proof presentation may be regarded as somehow superficial in that it is made too 'linearly' to truly represent how the argumentation was first 'carved out'. There are suggestions in the educational literature that proof presentation could be imparted in a way that reflects the creative aspects better without impairing rigor (Leron, 1983). On the other hand, the compression of language evident in the proof presentation allows clearing up the 'clutter' in order to reduce a problem and its resolution to its essential parts. Further, it is questionable that the teacher would always want to stress the proof and its formation over the fact that the proposition has been shown true. To regard a proof subservient to the fact it demonstrates can be justified in the context of progressing a mathematical theory requiring that fact.

We now progress to our second task. It follows the second model of stages in articulation. It will be described tersely, as the main targets of the paper is more allied to the first model.

Example B (Illustration of the second model)

A ladder of length L is resting vertically against a wall (on the y-axis). The ladder falls down to the ground (the x-axis), sliding down the wall. Find the plane region R comprising the points passed as the ladder falls.

An abridged solution:
The Initial Thoughts (Stage 1)

1. Instead of the plane region itself, think of its boundary.

2. It is easy to convince yourself that the boundary would consist of a part of the x-axis, part of the y-axis, and a plane curve that ‘starts’ at (0, L) and ‘ends” at (L, 0).

3. Realize the curve as the graph of a function.

The mathematical enabler (Stage 2)

4. Name the function of step 3 as g. Essentially we have the solution if we can determine g(x) for all $x \in [0, L]$.

5. We take x_0 as a generic element of [0, L]; our aim is to calculate $g(x_0)$.

The setting up stage (Stage 3)

6. We construct the line $x = x_0$; by doing this we have the means to record the height of the ladder above x_0 at any stage when the ladder is falling down. $g(x_0)$ is given by the maximal value that occurs.

7. Articulate the means to record the height. A ‘position’ of the ladder is represented by a line segment between (u, 0), where u is a chosen number from [0, L], and a point on the y-axis. If the line segment intersects the line $x= x_0$, then define the function f_{x_0} as the second coordinate of the intersection point; otherwise we set $f_{x_0} =0$.

The collation stage (Stage 4)

8. The second component of the intersection point can be easily obtained geometrically, so f_{x_0} is determined.

9. Collation: $g(x_0) = \text{Max } (f_{x_0}(u))$, which can be determined by standard optimization methods of Calculus.

10. Recast the information back into the context of the original task:

$$R = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, y \leq g(x)\}.$$

Above we have articulated the essential ‘moves’ for an entire solution; only the routine parts are omitted. Note that in giving this sketch, elements of linguistic compression is involved as well as articulation. We have given this problem in project work for undergraduate mathematics students without any hints; as yet we have not received a satisfactory solution. The main ‘block’ for the students seems to be that they are not able to recast a region into the ‘space’ enclosed by its boundary, and then to recast a plane curve as a graph. Without evoking and articulating such ideas as described in stage 1 and stage 2, it is difficult for students to even start an argument (e.g., Moore, 1994).

In both examples above, the last stage seems to seal a secure argument. In particular, the first example goes further than just giving a convincing line of reasoning. This leads us to make a fuller discussion about the character of proof.

WHAT IS THE CHARACTER OF A PROOF?

Format issues:

There is a tendency to regard all proofs to be set in a propositional format. However, it can be maintained that proofs arise in other circumstances. Consider the two following versions of the same task:

Version 1: Simplify $1 + 2 + \ldots + n$

Version 2: Prove that $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$

The difference between the two is insignificant except the second clears up the vagueness of what 'simplify' means in the first, but 'gives away' the desired answer, perhaps un-necessarily. Quite often it is a difficult choice for the person designing a task whether to phrase it in an open or closed way. In the example above, for the second version we can apply induction straightaway; from a problem-solving perspective, it is more satisfactory for students to work from the first.

To summarize then, a proof is often couched in a propositional format, but also a proof can arise as a final presentation of a solution to an open task.

What is proof?

To respond to this question, we'll borrow some words from Gian-Carlo Rota (1997), a prolific mathematician in combinatorics and an advocate of phenomenology, a branch of mathematical philosophy.

> Everybody knows what a mathematical proof is. A proof of a mathematical theorem is a sequence of steps, which leads to the conclusion. The rules to be followed in this sequence of steps were made explicit when logic was formalized early in the twentieth century and they have not changed since. (p.134)

Further in the same essay we read:

> Every mathematical proof is a form of pretending. Nowhere in the sciences does one find as wide a gap as that between the written version of a mathematical result and the discourse that is required in order to understand the same result. The axiomatic method of presentation of mathematics has reached a pinnacle of fanaticism in our time. A piece of written mathematics cannot be understood and appreciated without additional strenuous effort. Clarity has been sacrificed to … consistency of notation, brevity of argument and the contrived linearity of inferential reasoning. Some mathematicians will go as far as to pretend that mathematics is the axiomatic method, neither more or less. (p. 142)

A little further on the same page:

> Do not get me wrong. I am not condemning the axiomatic method. There is at present no viable alternatives to axiomatic presentation if the truth of a mathematical statement is to be established beyond reasonable doubt.

These comments probably represent well the 'average' position that working mathematicians take on proof. Most mathematicians want to impart some sense of meaning, but in the end this has to be translated into or extracted from a strictly defined mathematical system. Many would see 'clarity' not as a one-way issue, as suggested by Rota above; Intuitive or 'mental' argumentation can be crystallized in the process of formalization. But the fact remains that in practice the 'ideal' of a mathematical proof as being fully justified through logic is rarely realized in practice. Thurston (1995) states that '… it is preposterous to claim that mathematics as we practice it is anywhere near formally correct'. But what is the demarcation line that tells us when we can accept an argument as a proof? Also, from a logically based perspective, any proof is as 'good' as another. But there are many expressions made by mathematicians that are in accord to the well- known adage 'A good proof is one that makes you wiser', once uttered by Yu. I. Manin. Certainly, even a 'legitimate' proof is open to many kinds of criticism, or even controversy. An important issue in the philosophy of mathematics is the use of computer programs to prove theorems that seem to defy the human capacity of verification; the most famous cases are the four-colour theorem in 1977 by Appel & Haken, and Hale's proof of Kepler's conjecture concerning the densest arrangement of spheres published (after a considerable delay) in 2005, see e.g. Szpiro (2003), section 3 of Auslander (2008). Many mathematicians are worried by the lack of communication that such solutions provide; their criticisms include the lack of insight they impart. Others see that in the future the use of computers will radically challenge the present norms of mathematics based on deductive argument.

We will not delve deeper in the philosophy of mathematical proof: it is a topic that has attracted a huge amount of literature from many viewpoints. All that we are drawing out of it is the majority opinion that the notion of a rigorous proof is somehow contrived, but the contrivance itself allows us to proceed mathematics into realms that would be inaccessible otherwise (e.g., Downs & Mamona-Downs, 2005). Ideally, there are not 'degrees' of proof, but in practice there are. These degrees allow room to 'prefer' one proof over another. A proof that is explanative, transparent or promotes meaningfulness can be preferred to one that is not (e.g. Hanna & Jahnke, 1996), but there are other facets (e. g. utility) to be considered here. On the other hand, a proof is not completely gauged in terms of conviction; the argument has to pass into a mathematical system where it is suitably refined. A proof is usually communicated in a final, (supposedly) definitive presentation. From an educator's point of view, the interest is on how the student could produce such a proof presentation, or what a student would take away when reading one. From a problem-solving perspective, it is useful to distinguish the mental processes concerned in gaining the informal ideas supporting the strategy from those thoughts addressed to the articulation of the presentation. In this respect, Harel, Selden & Selden (2006) talk about a 'problem-centered part' and a 'formal-rhetorical part' in making a proof. (The term 'rhetorical' refers to the day- to- day language that remains, in a stilted way, in the proof presentation.) These two parts usually develop in unison, but also it is not rare for a certain detachment to occur. Sometimes students are not able to initiate any thought as how to progress at all. They are 'stuck' at the beginning. They might do some explorative work without any headway and make conjectures that are more blind guesses than anything else. No real argument, either intuitive or rigorous, is engaged. In this case we are mostly concerned with the first and second levels of articulation. This is illustrated in Task B of the previous section. How should the teacher intervene? On other occasions students are able to articulate informal argumentation but they can have problems in modeling it in an acceptable mathematical format. Here we are concerned with the third and fourth levels of articulation. In the following section, examples for this latter case will be considered.

EXAMPLES OF TRANSFERRING AN INFORMAL ARGUMENT INTO A MATHEMATICAL FORM

The material 'given' to the student here is rather unusual; the student is provided with both a statement of a task and an informal argument that addresses the task. There are several circumstances when an informal argument can become a given, e.g. the student provides it first, gives it to the teacher who then asks for an elaboration. Also, it can be a didactic device designed by the teacher / researcher to provide a relatively 'friendly' environment for mathematical modeling (Mamona-Downs & Downs, 2009). What is asked of the student is to enhance the material given, and to render it as a proof. We give two examples:

Example C

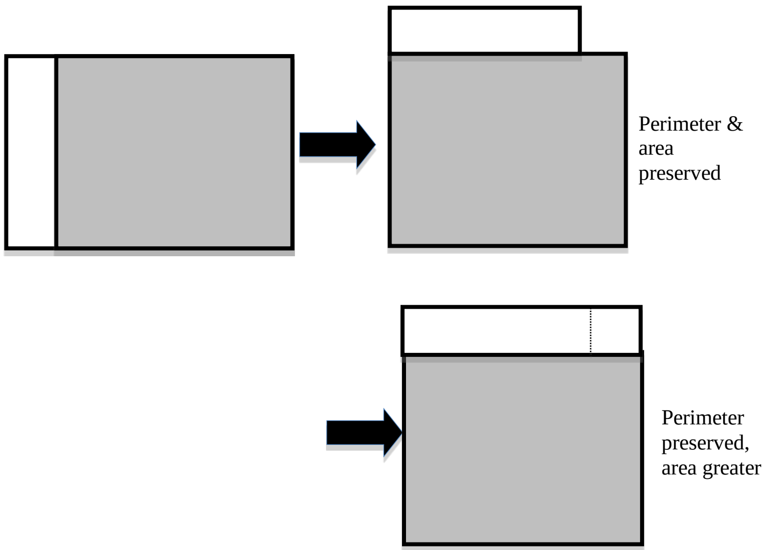
The Givens

Task: Prove that of all the rectangles with a specific perimeter, the one that has the greatest area is a square. (Do not use derivatives.)

Material to produce

Let R be a rectangle with sides x, y.
Without loss of generality, we assume that $x \geq y$.
Suppose that $x > y$, and let $\varepsilon < x - y$. Then
$x \cdot y = (x - \varepsilon)\, y + \varepsilon \cdot y < (x - \varepsilon)\, y + (x - \varepsilon)\, \varepsilon = (x - \varepsilon)(y + \varepsilon)$
whilst
$2x + 2y = 2(x - \varepsilon) + 2(y + \varepsilon)$
Hence, when $x > y$, there is a rectangle with the same perimeter but a greater area of R. This means the greatest area is achieved when $x = y$, i.e., when R is a square.

Diagrammatic evidence:



Comments

Most high school students meet this task, but usually only in the context of applying standard methods in Calculus for identifying local maxima / minima. The solution we give has a more fundamental basis, as the primal definition of a (global) maximum involves only the notion of inequality.

The argument no doubt would be accepted as a bona-fide proof at school. Even at the tertiary level this could be the case, but we would be more aware that hidden assumptions are involved, such as the issue of continuity. In practical terms, especially when considering the evolution of concepts as they are taught at different age ranges, it seems more realistic to accept that there are degrees of proof (depending on the mathematical tools available) rather than 'absolute' proof.

The informal approach was based on a sequence of diagrams. Really there is no doubt that the 'reading' of the diagrams would convince anybody that 'catches' it. The essentials of the proof are there 'before our eyes'. Even in the glossary of mathematicians there is a term 'visual proof' (e.g. Davis, 1993). But the articulation of the proof presentation is then suspended; for our perspective, a proof is not complete without it. Proof is more than conviction.

Hence we have to transfer the intuitive base of 'evidence' into an algebraic setting. In this case the transfer is fairly straightforward. The ideas implicit in the diagrams help to guide the control of the algebra; as soon as the presentation is completed, the role of diagrams can be forgotten. In general, the clarity of the exposition is often made at the expense of the clarity in how the exposition was attained.

Example D

Givens

Task: Suppose that the real sequence (a_n) is convergent, and there is a real number t for which the set $\{n \in N: a_n = t\}$ is infinite. Prove that the limit of (a_n) is t.

Informal Argumentation: There is a 'infinite number of terms' taking the value t, so however far the sequence has progressed there must still be a term having the value t not reached as yet. At the limit, the terms must be tending to the limiting value, but as far progressed the sequence is, t 'occurs', so the limiting value must be t.

Material to produce

Enhanced informal argumentation: Suppose that in fact it is not true that the limiting value is t. Then the value must be a number $l \neq t$. There is an explicit number expressing the distance between l and t. However progressed is the sequence, the value t 'occurs' and so there will always be terms that have a certain fixed distance from the limiting value. This contradicts the idea that the sequence is tending to the limiting value. Thus it cannot be true that l and t are different.

Proof Presentation: Suppose that $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ and $l \neq t$. Let $\varepsilon = \frac{1-t}{2}$. Then there is a natural number N such that for all n>N, $a_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$; also note that we have chosen ε such that $t \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Now there are only a finite number of $n \in N$ such that $a_n \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. This means that only a finite number of $n \in N$ satisfy $a_n = t$. This is a contradiction.

Comments

Here, we refine the given informal argument by articulating a second informal argument in 'preparation' for the mathematical modelling. As the first argument lacks the concreteness for it to be developed, we might consider the consequences if the proposal *was not true*. These consequences run contrary to the specifications of the task environment. This simple example shows that logical devices such as proof by contradiction can, up to a point, be naturally expressed in naïve language (c.f. Leron, 1985).

There is a point of vagueness shared by both mental arguments, i.e. the claim 'however far the sequence has progressed there must still be a term having the value t not reached as yet'. In order to remove this, we have to refer to the mathematical definitions of limits. The central definition says for any 'ε-strip' around l however ‘small’ ε is, there is a 'stage' of the sequence beyond which the values taken must be trapped in the strip. (This makes use of imagery that is usually introduced and ratified in the teaching process.) By choosing ε small enough, we can arrange the ε-strip to 'avoid' the value of t if $t \neq l$. Then there are only a finite number of terms 'at the start of the sequence' that can possibly take the value of t, and we reach a contradiction. Note here that we are making a casual commentary of how the formal proof works with reference to the mathematical tools that are required. We are articulating meanings from a formal expression.

EPILOGUE

Let us restate the targeted topics of the paper as they appeared in the introduction.

> What is the role of communication in creating the strategy behind a proof? In particular, can we usefully identify stages through the notion of articulation?
>
> What distinguishes an argument that is generally accepted as being secure from a strict proof? Indeed, is there a distinction? Is the very notion of a proof artificial?
>
> What is the relationship between articulation and meaningfulness? In particular, how can we transform intuitive ideas into an acceptable mathematical form?

For the first topic, we have suggested that typically we can identify four stages in the development of a solution; initializing thoughts, giving them expression, their accommodation mathematically, and the final solution/proof exposition. Articulation has a role in passing from one stage to another. We regard that an act of articulation is an expression of assimilation of thoughts that previously were held in the mind only inchoately. An act of articulation allows an expression of the current state of affairs from which a new line of thought can be based. Acts of articulation can occur in many mathematical situations, but in this paper we have appropriated them for the four stages in making a solution mentioned above. The sources of the starting thoughts can be articulated, but perhaps only after the solution/ proof has been completed and contemplated on; giving these thoughts expression certainly is an act of articulation, as is describing of the requisite mathematical tools that have to be adopted or developed, and rendering the argument into a final presentation. Two models were given, each one illustrated by an example. One concerns modeling intuitive reasoning into mathematical systems, the other starts and stays within the same mathematical environment but needs certain constructions that have to be articulated. The final stage in both models requires the crafting of an explicit presentation. This focus is not so evident in the problem-solving tradition in general; it seems to point more to a trait of proof.

This leads us to the second item. In this paper, we have chosen the particular angle of proof presentation in order to talk about the status of proof. In this context, a task concerning a proof does not necessarily appear in a propositional format, but can equally appear as a question for which its response is ultimately put into a tight mathematical form. We contend that what lays a secure argument (i.e. an argument that any suitably informed person would accept as hard evidence that the pertinent result is true) apart from a proof is the care taken about its presentation. Referring back to professional mathematicians' practices mentioned in the introduction, before publishing a proof, a mathematician typically makes many draft versions and much fine-tuning. This work is done *after* the truth of the result is essentially secured. However, it is important to realize that a proof presentation is not necessarily logically taut. Statements and inferences can assume much implicit mental argumentation, as we have seen in some of our examples. In this way, considerable condensation of language as well as articulation is required in forming the final proof presentation. A necessary criterion for an exposition of a proof is that any construct that is explicitly introduced has to be defined to explicate its usage. Further, all every-day words appearing in a description of an intermediate stage of the solution either have to be translated into the mathematical language, or side-stepped, by the time the proof presentation is completed. By saying side-stepped, we mean intuitive ideas that helped the mental processing, but in the end only acted as catalysts for the mathematical development. An example of this occurs in task A where we interpreted the task environment in terms of 'total displacement'; the notion was no longer obviously evident in the final mathematical modeling. Students are faced, then, not only with obtaining 'the result' in their own language, but also the additional task to re-express it as a proof presentation. These together can be a heavy load. In order to put students into a 'positive' frame of mind to perform mathematical modeling, we put forward a didactical device where the givens consist not only the task, but also an informal argument; what is left for the student to do is to render the argument into a proof presentation. Two illustrations were given; one, task D, required the student to articulate a second informal description beyond the one given to allow a linking up with the mathematical tools and language available.

The third item concerns meaning. There are of course many forms that meaning can take; we mention here some that occur vis-à-vis articulation. In task A the argument was motivated by extracting an informal meaning in the form of a metaphor made from the mathematical setting of the task. The metaphor led to a structural understanding (concerning those functions which interchange two particular sets that partition the common domain). The demands of mathematical expression require the deletion of any reference to the metaphor, but in doing this, a more functional version of the structural understanding arises with its own rationale and kind of meaning. In task B, a dynamical process (a ladder sliding down a wall) is considered, but what is asked for has a static character (determine a particular plane figure). This situation might be disorienting until some preliminary ideas are made, especially the 'move' to re-interpret a plane curve as the graph of a function. In this case, meanings develop as you are working. We regard this kind of obtaining meaning *in action* as being allied to the stages of articulation that we have talked about in this paper. An act of articulation goes further than a mere report of the current state of working but expresses a stance; a stance of what meanings we have ratified and what meanings are relevant in the present working environment. In this way, we can compare what we call 'an act of articulation' with the notion of 'an act of understanding' introduced by Sierpinska (1990). Also, Hitt (1998) talks about 'coherent articulation of different systems of representation in the solution of a problem'; representations are usually regarded as bearer of increased meaningfulness.

Apparently though there is a qualification to what has been claimed about the compatibility between articulation and meaning. In the paper, it is suggested that one role of articulation involves the forming of proof presentation. Proof presentation can be seen to students as the apogee of non-communication. However, here we should distinguish between the writer and the reader. For the writer the final presentation is just a culmination of a (perhaps) long development. The proof is a polished product, and only the creator knows the complete story behind achieving it. The reader though does not have access to this history. In making a proof presentation, one is mostly concerned in creating a self-contained mathematical environment for which the author is cognizant of the 'looser' deliberations made before. The reader can read the presentation just as a neutral document that validates the result/ proposition, but might also be interested in figuring out how the writer obtained the presentation. So a proof presentation gives the reader the opportunity to choose what he / she wants to extract from it. True, if the reader wishes to achieve a sense of understanding or of purpose from a formal demonstration, this can be a difficult enterprise. This problem has been acknowledged in the literature; for example, Selden & Selden (1995) discusses the process of 'unpacking' a proof on a cognitive level, Leron (1983) suggests that proofs are more readable when they are structured in a top to bottom manner (opposed to a 'linear' rendition). But on the whole there seems to be a lack of educational research on reading proofs (as noted in Alcock & Weber, 2005; Mamona-Downs & Downs, 2005). We feel that the idea of articulation might be significant when reflecting on the following question: "I have this proof (presentation) in front of me; can I trace some of the processes involved in its manufacture"?

Generally, students seem to lack skills of articulation. In consequence gross expositional mistakes are made, or 'vacuums' in argumentation appear, even though the answer might eventually be correct. (Such as in the 'motivating example' described earlier in this paper.) Perhaps some of the mistakes are made with the students' being aware that they are stating nonsense, at least in literal terms. Why: they simply cannot express themselves better (or are forced to write down something before they are ready, c.f., Vinner, 1997). For other situations, the lack of precision in students' verbal discourse can lead to wrong solutions, or to an extended dialogue that leads to nothing of value. Their attempts in articulation tend to be dysfunctional in more cases than not.

The role of articulation is crucial in mathematics making. This is particularly so when students have to negotiate several stages in their working. In this paper we have concentrated on the situation where an informal argument has to be 'transferred' into a tighter form. In this respect, some 'exemplars' were given to show how informal descriptions could fit in with a solution/ proof presentation. These are made in the spirit to illustrate what tactics teachers might take to accommodate intuitive material alongside the formal presentation, taking in account the actual acts of articulation that might be required. If these tactics were adopted, students might emulate their teachers, with the result that they will be en-cultured to regard the challenge of producing a rigorous proof presentation as satisfying and necessary as obtaining an informal argument.

REFERENCES

Alcock, L. & Weber, K. (2005). Proof validation in real anaysis: Inferring and evaluating warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*(2), 125-134.

Auslander, J. (2008): On the roles of proof in mathematics. In B. Gold & R.A. Simons (Eds.), *Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy* (pp. 61-78), The Mathematical Association of America.

Bereiter, C. (1985). Towards a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research*, *55*(2), 201-226.

Burton, L. (1999). The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics, 37*, 121-143.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 333-344.

Downs, M., Mamona-Downs, J. (2005). The Proof Language as a Regulator of Rigor in Proof, and its effect on Student Behavior. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (electronic form), Sant Feliu de Guixols, Spain.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter démontrer expliquer: Continuité ou rupture cognitive? *Petit X,* 31, 37-61.

L. D. English (Ed.) (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images.* Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

Gray, E.M. & Tall, D.O. (1994). Duality, ambigiuty and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 25, 2, 115-141.

Hanna, G. & Jahnke N. (1996). Proof and Proving. In Bishop, A. et al (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G., Selden, A. & Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking; some PME perspectives. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 147-172), Sense Publishers, Rotterdam.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134.

Johnson-Wilder, S. & Lee, C. (2008). Does articulation matter when learning mathematics? Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *28*(3).

Leron, U. (1983). Structuring Mathematical Proofs. *The American Mathematical Monthly, 90* (3), 174-184.

Leron, U. (1985). A direct approach to indirect proofs. *Educational Studies of Mathematics*, *16*, 321-325.

Mamona-Downs, J. and Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *Journal of Mathematical Behavior 24*, 385-401.

Mamona-Downs, J. (2009). The Role of Mental Argumentation in Mathematics vis-à-vis Property Perception and the Operational Mode. *Review of Science Mathematics and ICT Education*, *3*(2).

Mamona-Downs J. & Downs M. (2009). "Necessary Realignments from Mental Argumentation to Proof presentation". Proceedings of CERME 6, electronic form.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 249-266.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23-41.

Peirce, C. S. (1902) *The essence of Mathematics*.

Pirie, S. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: Language as (slippery) stepping-stones. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, A. Sierpinska (eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 7-29), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, U.S.A..

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics.* Routledge, London.

Gian–Carlo Rota (1997). *Indiscrete Thoughts*. Birkhauser, Boston.

Selden, J. & Selden A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 123-151.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse that meets the ear: Looking as thinking as communicating to learn more about mathematical learning, *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 13-57.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10* (3), 24-36.

Sierpinska, A. (1999). Three epistemogies, three views of classroom communication: Constructivism, socialcultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, A. Sierpinska (eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-64), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, U.S.A.

Szpiro, G. G. (2003). Does the proof stack up? *Nature*, *424*, 12-13.

Tall, D., McGowen, M. & De Marois, P. (2000). The function machine as a cognitive root for the function concept, *Proceedings of PME-NA*, *1*, 255-261.

Thurston, W.P. (1995). On Proof and Progress in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *15* (1), 29-37.

Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and pseudo-analytic thought processes in mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, *34,* 97-129.

O processo de demonstrar na aula de Matemática: um olhar sobre a comunicação emergente

Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

Resumo

Será apresentada parte do estudo desenvolvido no âmbito de uma dissertação de doutoramento que teve como objectivo primordial analisar: (1) o papel da demonstração em vertentes como (a) a compreensão matemática, (b) a validação do conhecimento matemático, e (c) a comunicação matemática; e (2) a relação entre a construção da demonstração e a prática social desenvolvida na aula.

Com base no referido estudo, será discutida a importância crescente que tem sido reconhecida à demonstração quer entre os educadores matemáticos quer nos diversos documentos curriculares a nível nacional e a nível internacional. A relevância da integração curricular da demonstração reside essencialmente no facto de proporcionar uma visão mais compreensiva da natureza da matemática e de promover a aprendizagem da Matemática.

Contudo, os estudos realizados nesta área têm dado evidência empírica de que os alunos revelam grandes dificuldades em compreender a necessidade da demonstração, em compreender as funções da demonstração e em construírem, eles próprios, demonstrações, tendendo a usar exemplos particulares como forma de validar as conjecturas que formulam. Não obstante essas dificuldades, os alunos do ensino básico poderão lidar com a ideia da demonstração e desenvolver a sua capacidade de demonstrar se existir um ensino orientado nesse sentido.

Uma vez que a comunicação é sobretudo um processo didáctico no qual professor e alunos interagem, constituindo um aspecto essencial, e simultaneamente transversal, do ensino e da aprendizagem da Matemática no contexto escolar, será apresentada a parte do estudo que mais directamente se relaciona com a comunicação. Será analisada a forma como se processa a negociação do significado e da necessidade da demonstração na aula de Matemática. Será também analisada a forma como são discutidas as ideias matemáticas envolvidas no processo de demonstração e, através de um enfoque na função explicativa e na função comunicativa da demonstração, será equacionado o papel da comunicação (e da demonstração) no desenvolvimento da compreensão matemática.

A actividade matemática escolar constitui uma actividade social, apresentando especificidades inerentes ao contexto onde se desenvolve. Ao equacionarmos a integração curricular da demonstração, esta poderá tornar-se objecto de estudo e de análise, enquanto vertente integrante da actividade matemática escolar. Neste artigo, a análise dos processos sociais desenvolvidos na aula de Matemática será enquadrada teoricamente numa perspectiva situada, assumindo uma particular importância a teoria social de aprendizagem de Wenger (1998) bem como o constructo *voz* (Wertsch, 1991).

Encarando a demonstração como um processo em que os alunos, ao longo da sua escolaridade, e através da argumentação em torno da justificação e da defesa das suas próprias afirmações (Cobb, Wood e Yackel, 1993; Yackel e Cobb, 1996), vão construindo gradualmente a noção de demonstração, a sua integração curricular no ensino básico é de extrema pertinência, enquanto instrumento ao serviço de uma compreensão mais aprofundada da Matemática. Nesta perspectiva, a demonstração poderá emergir em ambientes de sala de aula caracterizados pela existência de uma comunicação matemática em que os alunos expressam pública e genuinamente o seu pensamento matemático e em que o professor lhes coloca questões com a intenção de entender verdadeiramente o seu raciocínio e de o ampliar, ou de aprofundar ou modificar a sua compreensão matemática (*comunicação instrutiva*, segundo Brendefur e Frykholm, 2000). Uma comunicação matemática em que os alunos não só expõem as suas resoluções aos colegas mas também as explicam e defendem o seu raciocínio, ao serem questionados, quer pelo professor, quer pelos colegas, colocando-o como objecto partilhado de reflexão. Uma comunicação feita em múltiplas direcções e sentidos. No âmbito deste processo, os alunos começam por justificar as suas afirmações apoiando-se em exemplos particulares, evoluindo para justificações cada vez mais gerais. A demonstração, na aula de Matemática, poderá decorrer de uma justificação que encerre um raciocínio dedutivo e o carácter geral do universo matemático, ou de um contra-exemplo que refute a validade de uma dada afirmação.

O estudo (Rodrigues, 2008) apresentado neste artigo teve como objectivo central analisar as formas de persuasão e convencimento desenvolvidas pelos alunos e o papel da demonstração na aprendizagem, no contexto da sua relação com a prática social da aula de Matemática. O campo empírico do estudo incidiu numa turma de 9º ano, da qual foi seleccionado um grupo de quatro alunos. O trabalho desenvolvido por este grupo de alunos nas aulas de Matemática foi videogravado para posterior análise.

ARGUMENTAÇÃO E DEMONSTRAÇÃO: CONCEITOS DISJUNTOS OU INCLUSIVOS?

A clarificação dos conceitos de argumentação e demonstração e a apresentação de várias formas de os entender advém, em primeiro lugar, da necessidade de estabelecer o que se entende por demonstração em matemática e no contexto escolar. A concepção de demonstração em matemática tem vindo a mudar ao longo dos tempos. No entanto, a estrutura do raciocínio dedutivo, introduzida pela matemática grega, mantém uma certa estabilidade, sendo, essencialmente, a mesma que continua a ser adoptada actualmente (Harel e Sowder, 2007). Apesar dessa relativa estabilidade, poderemos assinalar mudanças históricas e culturais relativamente à visão sobre o papel da demonstração, a sua essência e as suas normas (Hanna e Jahnke, 1993) e, inclusivamente, alguns desacordos relativamente ao tipo de demonstração que se aceita e aos princípios lógicos permissíveis. Actualmente, o advento da utilização dos computadores, em particular, ampliou a controvérsia entre os matemáticos sobre o que se pode considerar, ou não, uma demonstração.

São vários os autores que definem a demonstração de um modo bastante abrangente, considerando-a um argumento que resulta de teoria aceite e que convence os matemáticos peritos, cépticos e qualificados (Benson, 1999; Hanna, 1996; Hersh, 1997). Em *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), demonstração é definida como um argumento consistindo em deduções rigorosas e lógicas a partir de hipóteses. Se pensarmos na construção de demonstrações realizada numa sala de aula de Matemática, os contornos que delimitam a definição apresentada em NCTM (2000) tornam-se muito mais esbatidos, uma vez que a noção de rigor é relativa. No contexto educativo, a demonstração assume um formato distinto do que caracteriza uma demonstração no seio do trabalho desenvolvido pelos matemáticos, não tendo que conter, necessariamente, um conjunto de frases simbólicas formais encadeadas de uma forma lógica e dedutiva, com a explicitação rigorosa dos termos *hipótese, tese e demonstração*. Aliás, é impossível reproduzir no contexto escolar o processo social de verificação desenvolvido no seio da comunidade matemática: é a especialidade detida pelos matemáticos e o seu investimento de tempo que fazem o processo funcionar. Tanto professores como alunos têm consciência de que estão a trabalhar com teoremas que já foram demonstrados pelos matemáticos (Hanna e Jahnke, 1993).

Na aula de Matemática, a demonstração deverá, porém, satisfazer as condições de generalidade e de dedução lógica, feita a partir de resultados conhecidos anteriormente. Simpson (1995, citado em Hanna, 2000) distingue dois tipos de demonstração: a que é feita através da lógica, e que pela sua formalidade é alheia aos alunos e incapaz de estabelecer conexões com as suas estruturas mentais, e a que é feita através do raciocínio, a qual envolve investigações e incorpora argumentos heurísticos, sendo acessível a uma grande percentagem de estudantes. Também Hersh (1993; 1997) concebe a demonstração no contexto escolar de um modo informal ou semi-formal com o recurso à linguagem natural e a eventuais cálculos, negando uma demonstração no sentido da lógica formal.

Definir a demonstração como um argumento convincente leva-nos à discussão sobre as possíveis relações entre argumentação e demonstração. Esta é uma discussão que não tem obtido consensos nem entre os filósofos nem entre os educadores matemáticos, existindo diferentes perspectivas que vão desde uma concepção de disjunção até uma concepção de existência de intersecção ou inclusão.

A demonstração oposta à argumentação

Para Perelman (1987), um filósofo com obra dedicada à argumentação publicada em 1958, estes dois conceitos são distintos e até opostos. A distinção estabelecida por Chaïm Perelman tem subjacente uma concepção formalista de demonstração. Assim, segundo este autor, a demonstração está associada à lógica formal e "diz respeito à verdade de uma conclusão ou, pelo menos, à sua relação necessária com as premissas" (p. 234) sendo impessoal e isolada de todo o contexto. A sua validade, ao residir no resultado das deduções feitas, não depende da opinião e não visa a adesão de um dado auditório, contrariamente à argumentação que é pessoal e situada, visando, na sua acção persuasiva, a adesão intelectual do auditório, o que implica ter em conta as suas reacções para que o discurso se adapte às mesmas. De acordo com o autor, enquanto a argumentação utiliza uma linguagem natural que pode variar bastante no que respeita ao nível de precisão ou de ambiguidade, a demonstração usa uma linguagem artificial, como é o caso da linguagem simbólica da lógica ou da aritmética, sem qualquer ambiguidade, de tal modo que a verdade ou a falsidade de uma proposição resultem unicamente da sua forma, não existindo lugar para diferentes interpretações. Perelman distingue ainda os dois conceitos pelo facto de considerar a verdade como uma propriedade da proposição, o que não acontece com a adesão do auditório, cuja intensidade constitui uma grandeza variável que pode ser sempre acrescida.

Um outro filósofo que assume uma posição idêntica, e igualmente fundamentada numa concepção formalista de demonstração, é Meyer (1982). Após considerar que todo o discurso é argumentativo, explicita por que é que tal assunção não pode conduzi-lo à inclusão da demonstração na argumentação, acabando por as opor. No âmbito das linguagens formais da demonstração, não é deixada qualquer possibilidade às proposições contraditórias do sistema. "La démonstration mathématique convainc parce que, sur une question donnée, elle donne *la* réponse, et que si on se pose celle-là, on ne peut qu'accepter celle-ci. D'où l'adhésion et l'accord" (Meyer, 1982, p. 136, destaque no original). No que respeita ao raciocínio não formal da argumentação, a questão pode permanecer em aberto, existindo a possibilidade da emergência de contradições. Para Meyer (1982), há argumentação desde que haja uma relação entre um explícito e um implícito. De acordo com Carrilho (1990), esta definição de argumentação é mais abrangente do que a proposta por Perelman, ao colocar a persuasão e a convicção como consequências daquela relação. Argumentar consiste em colocar uma questão. Meyer (1982) formula o que designa por lei geral da linguagem: o uso da linguagem é sempre função do par questão/resposta (unidade fundamental da linguagem). Segundo Carrilho (1990, p. 72), quando Meyer formula esta lei geral e estabelece "o paralelismo questão/resposta, problema/solução, implícito/explícito", a argumentatividade da linguagem revela-se manifestando uma racionalidade, na ordem da comunicação. A passagem da questão à resposta processa-se por uma inferência flexível que não necessita de ser totalmente explicitada pois é feita através do contexto: as informações partilhadas entre o locutor e o destinatário podem permanecer implícitas. Assim, o papel do contexto "é o de abrir a via de uma pluralidade de respostas possíveis, de uma diversidade de tematizações" (Carrilho, 1990, p. 24). E por conseguinte, a conclusão é uma possibilidade entre outras. Segundo Meyer, tal não acontece com as matemáticas ou com as ciências experimentais que, no seu discurso peremptório, explicitam quer as regras de inferência quer as premissas, já que o matemático ou o cientista não sabe a quem se dirige em particular ou o que pensa ou sabe o seu interlocutor. A demonstração matemática e o discurso científico são peremptórios porque não carecem de resposta; à questão colocada, é facultada uma resposta. Além disso, a conclusão impõe-se necessariamente. Pelo contrário, no raciocínio não formal, a questão pode permanecer em aberto e é perfeitamente possível que surjam desacordos e que se mantenham diferentes alternativas.

No domínio da educação matemática, Balacheff (1991) partilha da perspectiva de Perelman, referindo-o explicitamente e sustentando que enquanto a demonstração visa garantir a verdade de uma afirmação matemática, mostrando a validade lógica do raciocínio, a argumentação visa obter a concordância do interlocutor para a aceitação de uma dada afirmação. Na sua visão, o discurso argumentativo mantém-se sempre em relação com o contra-discurso. O autor apresenta as razões que o levam a distinguir a natureza da argumentação e da demonstração:

> As a social behavior it [the argumentation] is an open process, in other words, it allows the use of any kind of means; whereas, for mathematical proofs, we have to fit the requirement for the use of some knowledge taken from a common body of knowledge on which people (mathematicians) agree. As outcomes of argumentation, problems' solutions are proposed but nothing is ever definitive. (Balacheff, 1991, pp. 188-9)

Duval (1991) é um outro educador matemático que considera existirem diferenças substanciais entre o raciocínio dedutivo e o raciocínio argumentativo, embora admita que usem formas linguísticas e conectivos proposicionais similares. O autor distingue no raciocínio, seja ele dedutivo ou argumentativo, dois tipos de passagem que são de natureza distinta: a *inferência*, correspondente a um passo do raciocínio, e o *encadeamento*, correspondente à transição de um passo do raciocínio ao passo seguinte. E é por recurso a estes dois tipos de passagem que o autor estabelece as principais diferenças entre os dois tipos de raciocínio, argumentando que são diferentes num e noutro.

A inferência consiste na passagem de premissas ou hipóteses a uma outra proposição (conclusão) em virtude de uma regra explícita ou implícita, relevada de uma teoria local (um corpo de axiomas, de definições ou de teoremas) ou da estrutura de uma língua (a negação, as oposições semânticas, …). O raciocínio dedutivo usa inferências que têm uma organização ternária por recorrerem a regras explícitas de teorias locais enquanto o raciocínio argumentativo utiliza inferências que recorrem a regras implícitas da estrutura da língua, nas quais o conteúdo semântico das proposições é primordial, jogando as representações dos interlocutores um papel decisivo. Assim, numa inferência dedutiva, as proposições, ao invés de intervirem em função do seu conteúdo (como acontece na inferência argumentativa), intervêm em função do seu estatuto operatório, isto é, do lugar que ocupam no funcionamento do passo. Existem apenas três estatutos operatórios possíveis para uma proposição numa inferência dedutiva: a proposição de entrada (hipótese ou premissa), a regra de inferência (axiomas, teoremas, definições) e a conclusão (nova proposição obtida). Assim, consoante a situação do quadro teórico que se admita de partida, uma mesma proposição, independentemente do seu conteúdo, pode assumir diferentes estatutos operatórios, podendo ser uma hipótese numa situação, ou a regra de inferência numa outra, ou ainda a conclusão numa situação distinta. Numa dedução, os próprios conectivos proposicionais marcam exclusivamente o estatuto operatório das proposições que eles introduzem, não sendo portanto indispensáveis para marcar as articulações internas de uma inferência dedutiva (por exemplo, a expressão "sabe-se que" marca a proposição de entrada, a expressão "logo" ou "estou certo que" marca a conclusão). A distinção entre conteúdo e estatuto operatório de uma proposição é específica do raciocínio dedutivo. No raciocínio argumentativo, as proposições não têm estatuto operatório. Numa inferência argumentativa, os conectivos proposicionais (se… então, ou, logo, portanto,…) são extremamente importantes ao explicitarem o conteúdo da relação de inclusão ou de exclusão entre as significações de duas proposições.

Relativamente ao encadeamento, Duval (1991) clarifica que um dos seus requisitos, no caso de ser dedutivo, é o de a conclusão do primeiro passo constituir o ponto de partida do passo seguinte. Ou seja, no encadeamento dedutivo, uma mesma proposição tem dois estatutos operatórios diferentes, o de conclusão no primeiro passo e o de proposição de entrada no segundo passo. A *reciclagem* de uma mesma proposição tanto se pode fazer por intermédio da repetição da proposição como por intermédio de uma expressão que lhe faça referência de forma explícita. Assim, a ligação entre os dois passos dedutivos baseia-se na repetição de uma proposição e não numa relação lógica ou semântica entre duas proposições diferentes pertencendo a cada um dos passos ligados, como acontece no encadeamento argumentativo. Daí que o recurso a conectivos como "ou", "logo", ou "se … então" nunca possa ser feito num encadeamento dedutivo. O raciocínio dedutivo comporta dois níveis de organização, correspondentes à inferência (primeiro nível) e ao encadeamento (segundo nível). O raciocínio argumentativo apresenta uma outra organização, em que não se consegue distinguir diferentes níveis: os argumentos justapõem-se seja para se reforçarem mutuamente, seja para se oporem. As proposições não são recicladas mas reinterpretadas por diferentes pontos de vista. Assim, o encadeamento argumentativo baseia-se em relações que devem ser explicitadas através dos conectivos, processando-se, portanto, através de uma *conexão extrínseca*. No raciocínio argumentativo, é possível distinguir dois planos de discurso, em função do confronto entre dois pontos de vista, isto é, em função do carácter dialógico inerente à argumentação.

Partindo dos aspectos distintivos descritos atrás, Duval (1991) tira implicações didácticas relativamente ao ensino da demonstração na aula da Matemática, assumindo implicitamente uma posição defensora da distinção entre demonstração e argumentação, por envolverem raciocínios que, do ponto de vista do seu funcionamento cognitivo, são substancialmente diferentes. Afirma, no entanto, que as características superficiais de ambos os raciocínios — as formas linguísticas e os conectivos proposicionais — são semelhantes, o que pode dificultar, no seu ponto de vista, a aprendizagem da demonstração por parte dos alunos.

A demonstração incluída na argumentação

Encontramos em Carrilho (1990), no domínio da filosofia, uma visão inclusiva da demonstração na argumentação, encarando-a como estratégia argumentativa particular, embora se refira à demonstração associada à racionalidade científica em geral, designando-a por *prova*, e não propriamente à demonstração matemática:

> Uma ideia se torna aqui possível, a de que a racionalidade comporta diversas matrizes e que esta diferenciação supõe estratégias argumentativas distintas. Se assim for, é preciso caracterizar a articulação *matriz* de racionalidade/*tipo* de argumentação e, ainda, determinar os regimes da operatividade argumentativa: podem então apurar-se quatro matrizes fundamentais da racionalidade, a *científica*, a *hermenêutica*, a *comunicacional* e a *problemático-interrogativa*, bem como as ideias «reguladoras» que, em cada caso, lhes determinam a estratégia argumentativa, isto é, respectivamente, a de *prova*, a de *tradição*, a de *comunidade*, a de *problema*. (Carrilho, 1990, p. 78, destaque no original)

Segundo este autor, a teoria da argumentação interessa-se pela relação entre quem sustenta uma teoria, uma hipótese ou uma tese e quem as recebe, visando os procedimentos discursivos que transformam ou não a relação de afinidade em assentimento. Carrilho (1990) apresenta a sistematização de diferentes pontos de vista sobre a argumentação num registo tríplice: a argumentação como (a) *raciocíni*o, pelo "desenrolar das razões que provocam ou refutam uma tese" (p. 71), conduzindo a uma prova ou a uma conclusão, na ordem do verdadeiro e do necessário, mas também na ordem das opiniões comuns e do provável; (b) *intervenção*, pela apresentação de um modo plausível de factos e valores com uma certa ordem e finalidade; e (c) *interacção*, pela relação intersubjectiva, em que as intervenções de um outro são antecipadas, retomando-as ou refutando-as. Na sistematização atrás apresentada, podemos incluir a demonstração matemática no primeiro registo: uma argumentação como raciocínio, confirmando ou refutando uma tese na ordem do necessário e do verdadeiro. A ordem do provável e das opiniões comuns remete para a argumentação como raciocínio da vida quotidiana conducente à formulação de conclusões. De acordo com Carrilho

(1990, p. 71), esta "sistematização é interessante sobretudo por conduzir ao problema central, que é o do estatuto da linguagem no interior da argumentação e do conhecimento".

A pluralidade com que Carrilho concebe a racionalidade, a que corresponde uma pluralidade de tipos de argumentação, é próxima da ideia de pluralidade de *campos de argumentos* de Toulmin (1969). Para Stephen Toulmin, filósofo que publicou uma obra incidente na argumentação, na mesma altura que Perelman, dois argumentos pertencem ao mesmo campo se os *dados* e as *conclusões* forem do mesmo tipo lógico; caso contrário, pertencerão a diferentes campos. Este autor considera que é possível exigir-se uma argumentação a qualquer que seja a afirmação, tenha ela a natureza que tiver. Todos os argumentos são constituídos essencialmente por três elementos básicos: (a) dados (factos invocados como fundamento da conclusão), (b) *garantia* (frase geral e hipotética que funciona como ponte entre os dados e a conclusão) e (c) *conclusão* (cujos méritos se pretende estabelecer). O autor chama, ainda, a atenção para o facto de a distinção entre dados e garantias não ser absoluta, uma vez que um mesmo enunciado pode corresponder aos dados numa situação, e funcionar como garantias, numa outra. Além destes três elementos essenciais da microestrutura de um argumento, Toulmin ainda considera outros elementos acessórios que tanto podem ser necessários como não. Entre estes, inclui-se o *fundamento* da garantia, que contrariamente ao carácter hipotético desta, assume a forma de frase categórica e factual, justificando porque deve ser aceite a autoridade da garantia. O autor, embora considerando que a argumentação é invariante na sua estrutura, reconhece que a mesma é modelada de diferentes maneiras, consoante o campo, questionando-se sobre quais os aspectos que variam em função do campo e quais os que se mantêm invariantes. Concretamente, no que respeita aos aspectos que são dependentes dos campos, o autor foca os modos de avaliação dos argumentos usados e respectivos critérios, bem como a forma de qualificar as conclusões alcançadas, afirmando que a validade de uma argumentação é interna ao campo a que pertence. O fundamento necessário para estabelecer as garantias também varia de campo para campo. Relativamente ao rigor de uma argumentação, o autor refere que essa questão só pode ser colocada dentro de um mesmo campo: por exemplo, tem sentido comparar o rigor matemático presente em duas demonstrações distintas, mas já não faz qualquer sentido comparar o rigor matemático de um eminente matemático com o rigor jurídico de um alto magistrado judicial. Por conseguinte, uma argumentação tem sempre de ser situada no seu campo particular. São os saberes e as normas de cada um dos campos específicos de argumentos que fundamentam as justificações sustentadoras do discurso argumentativo e que permitem avaliar os raciocínios desenvolvidos.

Para Toulmin, a demonstração matemática é um argumento particular que se inscreve num campo específico, diferente de outros campos com outros tipos de argumentos. No estudo que aqui apresento, assumo também essa posição. Considero que a distinção estrita entre demonstração e argumentação que

Perelman e Meyer estabelecem fundamenta-se na concepção formalista que têm de demonstração. Se atendermos à demonstração tal como ela é produzida na prática efectiva dos matemáticos, verificamos que a demonstração não tem completamente um carácter lógico-formal, incorporando a linguagem natural e assumindo características informais (Hersh, 1993; 1997). Determinados passos podem ser omissos por serem de entendimento implícito entre o seu autor e o auditório a que se destina. Daí que encontremos na demonstração matemática um jogo entre o que se explicita e o que se torna implícito. Thurston (1995), ao focar a sua própria experiência de produzir e provar teoremas, chama a atenção para a importância do auditório na construção das demonstrações e, em particular, na comunicação das mesmas. Assim, dependendo do auditório específico, necessitará de explicitar mais ou menos certas partes das demonstrações, para que estas sejam compreendidas pelos outros matemáticos. Em termos absolutos, nem é completamente impessoal, já que na aceitação de uma dada demonstração, intervêm factores pessoais como o reconhecimento da integridade e da competência do autor da mesma (Hanna e Jahnke, 1996; Hersh, 1997; Thurston, 1995), levando os matemáticos a sentirem-se dispensados de examinar detalhadamente a demonstração linha a linha. No entanto, mesmo numa acepção prática de demonstração, mantém-se bastante pertinente a distinção entre verdade e adesão, feita por Perelman: a comunidade de matemáticos ou aceita ou não aceita uma demonstração, validando a verdade da conclusão alcançada pela demonstração. Aqui a verdade tem um carácter dual, e não gradual, como acontece com a adesão. Mesmo que essa aceitação não seja consensual em toda a comunidade, ela não se baseia numa maior ou menor adesão.

A demonstração apresenta, pois, uma especificação própria, visando uma validação por meio de uma justificação no interior de um domínio teórico, podendo portanto distinguir-se de uma argumentação comum espontânea, quer pelo modo de funcionamento dos respectivos raciocínios (Duval, 1991), quer pelo facto de a construção dos argumentos demonstrativos requerer o conhecimento de regras e convenções estabelecidas pela comunidade matemática (Balacheff, 1991). Ou seja, é necessário atender ao campo de argumentos específico da demonstração matemática, tal como proposto por Toulmin (1969).

INTEGRAÇÃO CURRICULAR DA DEMONSTRAÇÃO: RELEVÂNCIA E DESAFIOS

Segundo Hanna (1996), demonstração é um argumento transparente usado para validar uma afirmação, e que tem uma dupla função, a de promover a compreensão e a de convencer. A relevância da sua integração curricular está associada, por um lado, a um dos principais objectivos do ensino da Matemática: permitir que os alunos compreendam a natureza da matemática, ciência cujas teorias são comprovadas, não pela experimentação, mas sim pela demonstração, não obstante a presença da experimentação e da intuição na actividade matemática, em particular, na fase inicial de descoberta (Hanna, 1996; 2000). De Villiers (2004) advoga que se deve consciencializar todos os alunos, em todos os níveis de ensino, desta diferença fundamental entre a matemática e as outras ciências: enquanto a ciência é baseada, em geral, nas suas asserções empíricas, as regularidades encontradas em matemática não constituem uma prova. O autor afirma mesmo que "nobody, today, can really be considered mathematically educated or literate, if he or she is not aware of the insufficiency of quasi-empirical evidence to guarantee truth in mathematics, no matter how convincing that evidence may seem" (de Villiers, 2004, p. 412). Por outro lado, a justificação desta integração reside sobretudo no papel que a demonstração pode desempenhar ao nível da promoção da compreensão matemática (Hanna, 2000; Hersh, 1993; 1997; NCTM, 2000). É esta a sua função primordial no contexto escolar: uma função explicativa que provoque um salto qualitativo nas aprendizagens dos alunos. Mais importante que validar ou conhecer certos factos matemáticos é compreender por que motivo ocorrem. Daí ser fundamental uma integração transversal a todo o currículo, de forma a não ser tratada de forma independente dos vários conceitos matemáticos. Este tipo de compreensão, facultada por uma demonstração explicativa, coloca o pensamento matemático dos alunos num nível superior conceptual.

A importância que a comunidade da educação matemática tem reconhecido à demonstração na matemática escolar, tem tido, ultimamente, como reflexo, uma valorização da mesma nos currículos prescritos a nível internacional e nacional. Contudo, continua a existir uma grande distância entre a prescrição curricular e o currículo em acção, no que toca a este aspecto em particular. Os estudos desenvolvidos com professores neste domínio, à escala internacional, indicam que a maioria dos professores não reserva tempo das suas aulas ao ensino da demonstração (Harel e Sowder, 2007). Evidenciam ainda que a maioria dos docentes não encara a demonstração como sendo central na educação matemática, considerando-a adequada apenas a uma minoria de alunos.

Os estudos empíricos incidentes nesta temática evidenciam também francas dificuldades dos alunos, desde o nível mais básico até ao nível superior, quer na compreensão da importância ou da necessidade da demonstração, quer na sua construção (Brocardo, 2001; Chazan, 1993; Harel e Sowder, 2007; Recio e Godino, 2001; Rodrigues, 1997; 2000; 2008). De acordo com Healy e Hoyles (2000), o processo de demonstração revela-se complexo para os alunos já que envolve uma série de competências que, por si só, não são nada simples: (a) identificar assunções, (b) isolar as propriedades e estruturas dadas e (c) organizar os argumentos lógicos. Daí que seja uma questão premente para a educação matemática a de clarificar o que deve ser feito no sentido de desenvolver nos alunos essas mesmas competências demonstrativas.

Segundo de Villiers (2001), o problema dos alunos com a demonstração reside mais na falta de motivação e de compreensão da respectiva função do que na falta de competência no raciocínio lógico, apontando estudos reveladores de que crianças muito novas são capazes de raciocinar logicamente num contexto de situações reais significativas para elas. Os estudos focados em exemplos de experiências curriculares, concebidas com o objectivo de desenvolver nos alunos a capacidade de demonstrar, em que os professores intervenientes valorizam o ensino da demonstração, mostram que currículos de Matemática apropriados, em conjunção com uma intervenção adequada do professor, podem ajudar os alunos a desenvolver o raciocínio dedutivo e a lidar, desde muito cedo, com as ideias da demonstração (Harel e Sowder, 2007).

A natureza do discurso é um elemento-chave na compreensão do que deve ser um contexto favorável ao desenvolvimento da competência em demonstrar na aula de Matemática. Um ambiente de aprendizagem em que seja comum os alunos explicitarem as suas formas de pensar, e argumentarem e contra-argumentarem em torno dos seus raciocínios, ao invés de ser o professor a ajuizar sobre a correcção de uma dada afirmação, é um factor que contribui para o desenvolvimento, nos alunos, da sua capacidade de demonstrar (Harel e Sowder, 2007).

De acordo com Balacheff (1991), para a motivação dos alunos para a demonstração, é fundamental que o professor devolva aos alunos a responsabilidade da validação das afirmações matemáticas. A discussão desenvolvida entre os estudantes no seio do pequeno grupo e também com o professor em grupo-turma tem, igualmente, uma importância decisiva na emergência do significado da demonstração e na motivação para demonstrar as conjecturas formuladas (Alibert e Thomas, 1991; Boavida, 2005; Fonseca, 2004; Mariotti, 2000). No entanto, Balacheff (1991) refere que nem sempre tais situações de interacção garantem, por si só, que os alunos se envolverão em discussões matemáticas e que, por fim, produzirão uma demonstração. Os resultados do seu estudo evidenciaram que as interacções sociais, desenvolvidas no seio do pequeno grupo, podem favorecer a emergência de processos de demonstração nos alunos mas podem também ser um obstáculo à produção de demonstrações. Constituem um obstáculo quando os alunos não conseguem coordenar diferentes pontos de vista e ultrapassar o seu conflito numa base científica, acabando por optar por formas empíricas de validação para conseguirem obter o acordo dos colegas, já que deverão encontrar, num dado problema, uma solução comum a todo o grupo.

A compreensão do que é uma demonstração e o desenvolvimento nos alunos de uma visão valorativa da mesma, que os leve a sentirem necessidade de a produzir, encarando-a como argumento geral, relacionam-se, de acordo com Hanna e Jahnke (1993), com uma visão de uma base pragmática para a demonstração. No contexto escolar, a perspectiva dedutiva e a perspectiva de aplicação deverão manter-se intimamente ligados. A significância de um teorema decorre da sua aplicação. Daí que os professores devam considerar a contribuição de uma dada demonstração na compreensão da realidade, não podendo, pois, ignorar o aspecto da aplicação, como acontece com os matemáticos. A relação entre a matemática e a realidade tem um papel fundamental no ensino e na aprendizagem. O ensino da demonstração com a consideração desta relação implica um elevado nível de complexidade epistemológica nos processos de ensino e de aprendizagem. Na perspectiva dos autores, o ensino tem de ser multi-dimensional e processar-se a diferentes níveis, o que no caso particular da demonstração, é difícil de conseguir, sendo um campo em que há ainda muito a fazer. Focando o papel da comunicação, os autores defendem que a comunicação na matemática escolar visa a complexidade matemática enquanto na escola, a comunicação lida com a complexidade epistemológica. Como os estudantes não possuem o conhecimento contextual que lhes permita justificar um teorema em termos da sua aplicação, é na situação de aprendizagem que estes dois aspectos não se podem separar: o argumento dedutivo tem de se relacionar com a sua área de aplicação intra ou extra-matemática. Segundo Hanna e Jahnke (1993), os alunos não estão seguros acerca dessa relação e é por esse motivo que estabelecem conclusões gerais com base em medições ou que duvidam da validade geral de uma demonstração matemática, recorrendo, a testes empíricos mesmo que estejam na presença da mesma. Os autores defendem, ainda, que é necessário que os alunos tenham uma experiência vasta e coerente na área de aplicação de um dado teorema para que compreendam o seu significado. Tal pode e deve ser feito separadamente da derivação formal. E só então os estudantes serão capazes de valorizar uma demonstração.

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

A metodologia do estudo teve uma natureza interpretativa, dada a respectiva adequação com a problemática investigada e com as questões orientadoras do estudo: (a) qual a natureza da demonstração no contexto escolar?, (b) qual o papel da demonstração na actividade matemática escolar?, e (c) de que forma a concretização da demonstração se relaciona com a prática social desenvolvida na aula de Matemática?

A análise do estudo incidiu nos processos de ocorrência dos acontecimentos e nos significados dos participantes envolvidos. A investigação enquadra-se, por conseguinte, numa abordagem de natureza qualitativa, com a recolha de dados de índole qualitativa, ricos em pormenores descritivos. Foram observados os comportamentos dos alunos, o modo como desenvolvem a sua actividade matemática, e as suas interacções, em contexto de sala de aula, sendo este ambiente natural a fonte directa dos dados, dada a necessidade de analisar as situações contextualmente.

Os dados analisados foram recolhidos numa escola do ensino básico, numa turma de 9º ano, durante o ano lectivo de 2005/06, nas aulas de Matemática em que foram exploradas as tarefas acordadas com a professora, num total de 30 aulas, correspondendo a 15 blocos de 90 minutos. Foi seleccionado, na turma, um grupo de quatro alunos para constituir o alvo da pesquisa e foi o trabalho desenvolvido pelo mesmo que foi videogravado. Foram utilizadas as seguintes técnicas de recolha de dados: entrevistas semiestruturadas videogravadas (à professora e a cada um dos alunos do grupo-alvo), observação participante e naturalista, e análise de documentos. Os documentos utilizados como fontes de informação incluem: (a) os registos vídeo e (b) os trabalhos de todos os alunos da turma escritos.

Na investigação de tipo qualitativo, a análise dos dados é feita, fundamentalmente, de forma indutiva, existindo o propósito de percorrer um processo de exploração e descoberta de aspectos emergentes da própria análise de dados. Contudo, quer a dedução quer a indução estiveram presentes na análise qualitativa de dados (Brown e Dowling, 1998; Erickson, 1986; Merriam, 1991), uma vez que a dedução decorrente dos conceitos teóricos, enquanto instrumentos analíticos dos episódios empíricos, relacionou-se dialecticamente com a indução da análise de dados.

Enquadramento teórico

Alguns dos constructos teóricos mobilizados no presente artigo são *recurso estruturante, voz* e *identidade*. Lave (1997) define recurso estruturante como algo — conceitos, objectos, pessoas, actividade — que suporta uma dada situação, dando-lhe forma estrutural. Voz é um constructo bakhtiniano, representando uma personalidade (consciência) falante, que Wertsch (1991) utiliza, no âmbito de uma perspectiva vygotskyana, sustentada pela ideia de que o modo de funcionamento da mente humana individual tem origem nos processos sociais comunicativos. O *ventriloquismo* constitui o processo de uma voz falar através de outra voz. Existe neste processo uma certa interferência de uma voz noutra voz, acompanhada por uma subordinação parcial e correlativa. Qualquer palavra, antes de ser apropriada pelo indivíduo, ao lhe conferir a sua própria intenção, é retirada das outras pessoas e dos seus contextos concretos. A elocução está inerentemente associada a pelo menos duas vozes, pois encerra, em si mesma, o conceito de endereçamento. A comunicação é vista como uma longa cadeia de elocuções interdependentes, reflectindo-se mutuamente.

A teoria da actividade de Leont’ev (1978) constitui igualmente um instrumento analítico, sendo usado o constructo *motivo*. Para este psicólogo soviético, a actividade humana individual constitui um sistema dentro do sistema de relações sociais. A actividade, unidade de análise central na sua teoria, é formada por acções, e estas são compostas por operações que dão significado às acções realizadas sob constrangimentos específicos. As acções estão subordinadas a objectivos que representam passos intermédios na satisfação dos motivos humanos gerais. A actividade é, pois, um sistema de coordenações, limitada pelos motivos, sendo possível distinguir-se três níveis na sua estrutura. O nível mais elevado corresponde ao motivo, o intermédio é a acção direccionada por objectivos e o nível inferior corresponde às operações. Leont'ev (1978) distingue os motivos sociais, de formação de sentido, dos individuais, de estimulação. Nas relações hierárquicas entre os motivos, são os sociais, de formação de sentido, que ocupam o nível mais elevado.

A prática social da aula de Matemática foi analisada pela perspectiva da teoria social de aprendizagem de Wenger (1998). O foco principal desta teoria é a aprendizagem como participação social, entendida como o processo de ser participante activo nas práticas das comunidades sociais e de construir identidades em relação a estas comunidades. Por exemplo, participar num trabalho de grupo é simultaneamente uma forma de acção e uma forma de pertença. A aprendizagem não é apenas uma acumulação de capacidades e de informação, é uma experiência de identidade, já que a aprendizagem transforma o que somos e o que conseguimos fazer. A construção de uma identidade consiste na negociação dos significados da experiência de pertença a comunidades. Ou seja, tanto a participação como a não-participação são fontes da identidade. A não-participação pode ser ela própria um aspecto da prática. O autor salienta o facto de que o que transforma a informação em conhecimento, tornando-a poderosa, é o modo como a mesma pode ser integrada numa identidade de participação. Caso contrário, a informação permanece fragmentada, inegociável e alienada. Wenger salienta a dualidade do processo de formação da identidade já que o mesmo se constitui pela tensão entre a *identificação* e a *negociabilidade*. A identificação é um processo contínuo de construção de uma identidade num contexto social, através do qual os modos de pertença se tornam constitutivos da identidade. A negociabilidade refere-se à habilidade, facilidade e legitimidade em contribuir para dar forma aos significados relevantes numa dada configuração social, permitindo aplicar os significados em novas circunstâncias. Segundo o autor, a tensão entre identificação e negociabilidade é intrínseca a uma concepção social da identidade. E falar desta tensão é falar acerca do poder e do modo de pertença. O poder resulta quer da pertença quer do exercício do controlo sobre aquilo a que se pertence. A sua estrutura dual — ser membro de, e *posse de significado* — reflecte a interacção entre a identificação e a negociabilidade. É a identificação que fornece o material constitutivo da identidade e é a negociabilidade que permite usar esse mesmo material para afirmar a identidade como produtora de significado. A posse de significado refere-se ao grau com que uma pessoa usa, modifica, ou afirma como seus os significados que negoceia. No entanto, não se trata de um conceito com um pendor individualista. Pelo contrário, pelo facto de a posse de significado ser partilhada, verifica-se um crescimento da mesma em todos os participantes.

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE ALGUNS RESULTADOS

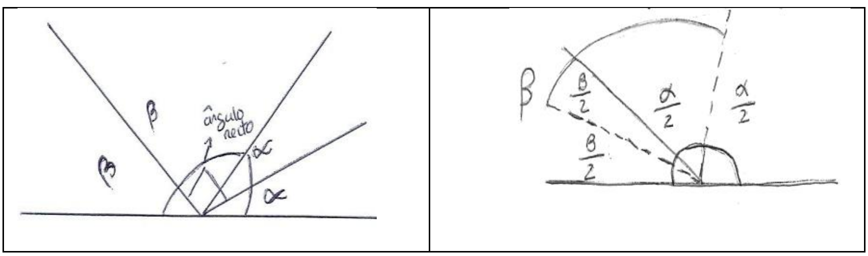
Nesta secção, irei apresentar alguns dados relacionados com a exploração de uma única tarefa e discuti-los de forma a focalizar a atenção nos aspectos comunicativos. A tarefa visava a descoberta da relação entre as bissectrizes de ângulos suplementares adjacentes e após a colocação desta questão, uma pequena nota, incluída no enunciado da tarefa, sugeria que os alunos fizessem esquemas dos ângulos e respectivas bissectrizes.

A negociação da necessidade e do significado da demonstração

A professora introduziu a tarefa referindo que a mesma tinha dois objectivos: o de trabalhar e recordar conceitos já aprendidos anteriormente e o de ir desenvolvendo, a pouco e pouco, a competência de demonstrar. Alertou os alunos para o facto de no exame de 9º ano do ano lectivo transacto ter sido pedida explicitamente uma demonstração, na qual dever-se-ia utilizar letras e não exemplos particulares.

Todos os grupos de alunos conseguiram concretizar esta tarefa com sucesso, tendo seguido processos similares. Primeiro, fizeram o esquema que, para a maioria dos grupos, não foi revelador da relação entre as bissectrizes, uma vez que o ângulo recto formado pelas mesmas se encontrava, em todos os esquemas desenhados pelos alunos, numa posição oblíqua, pouco habitual, relativamente à forma como os alunos usualmente vêem ou representam um ângulo recto. Daí que, nesta tarefa, a maior parte dos alunos da turma não chegasse a conjecturar, partindo para a manipulação algébrica sem a mínima suspeita sobre o respectivo resultado. As bissectrizes foram traçadas sensivelmente a meio de cada um dos ângulos, sem qualquer preocupação de medição (Fig. 1).

Fig. 1. Esquemas elaborados por dois grupos de alunos.



Passo a apresentar a resolução algébrica da tarefa feita pelo grupo-alvo (cujo esquema é o da esquerda da Fig. 1) que foi semelhante à dos restantes grupos:

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \\ \dfrac{2\alpha}{2} + \dfrac{2\beta}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{cases}$$

R: A relação entre as bissectrizes de ângulos suplementares é que formam sempre um ângulo de 90º. (Rodrigues, 2008, p. 678)

Trata-se de uma resolução que constituiu simultaneamente a demonstração da relação questionada. A maior parte dos grupos apenas alcançou a solução por meio da manipulação algébrica. Apesar de os alunos terem feito primeiro o esquema, só um grupo ficou com a percepção da perpendicularidade das bissectrizes, pela respectiva observação, tendo alcançado a certeza dessa relação pela demonstração efectuada. O esquema ajudou a generalidade dos alunos a traduzir a situação algebricamente, a que não foi alheia a própria notação dos ângulos escolhida pelos mesmos. No grupo-alvo, foi um dos seus elementos que, por *insight*, descobriu a relação, previamente ao traçado do esquema ou a qualquer outro registo escrito.

A professora negociou com os alunos a generalidade associada à demonstração quando, na introdução da tarefa, os incutiu para um trabalho de validação sem recurso ao uso de exemplos particulares. A generalidade esteve igualmente presente na sugestão do esquema já que este pressupõe a ausência de rigor no traçado dos objectos geométricos em causa e, portanto, qualquer amplitude assinalada teria forçosamente que decorrer de uma propriedade teórica e não de uma medição que, pelo seu cariz, é sempre particular e transporta consigo, por inerência, um certo erro. Ou seja, os objectos geométricos, instanciados no esquema, foram sempre assumidos na sua generalidade. Também na conclusão da tarefa, após as apresentações feitas pelos alunos, a professora reforçou essa mesma generalidade ao enfatizar que tal relação se verifica *sempre* para todos e quaisquer ângulos suplementares (adjacentes) que se queira considerar, exprimindo oralmente o que os vários grupos tinham redigido como conclusão da demonstração algébrica.

Neste caso, em que a conjecturação esteve, praticamente, ausente do trabalho dos alunos, por terem tomado como ponto de partida objectos gerais, e não casos particulares, a demonstração surgiu como que naturalmente na actividade matemática dos alunos, sem que a professora incidisse o seu discurso na negociação da sua necessidade, uma vez que a demonstração aglutinou, em si, o processo de descoberta e de resolução conducente a uma solução, bem como o processo de verificação e de justificação. Trata-se de uma demonstração que, numa fase única de trabalho, coincidente com a própria exploração da tarefa, assumiu simultaneamente múltiplas funções: de descoberta, verificação, explicação, e comunicação. Ao mesmo tempo que descobrem a solução do problema, os alunos ficam convictos que a mesma é verdadeira. Contudo, o que os motivou sobretudo para a construção de uma demonstração foi a pretensão de descobrir uma dada relação entre entes geométricos.

O diagrama foi um recurso estruturante (Lave, 1997), suportando e dando forma estrutural à actividade matemática desenvolvida pelos alunos que se caracterizou pela sua base dedutiva e pelas relações teóricas entre os objectos matemáticos. Efectivamente, o esquema, ao ser elaborado com pouco rigor, representou, desde o início, os ângulos na sua generalidade, e não casos particulares medidos rigorosamente. Por conseguinte, as justificações encontradas baseiam-se em propriedades e não em medições empíricas ou informações perceptivas.

A própria notação usada foi crucial pois a identificação dos ângulos com letras do alfabeto grego facilitou a emergência de algumas das relações importantes (como o caso da relação de igualdade entre ângulos, ao fazer-se o registo de duas letras iguais), e os alunos desligaram-se, desde logo, das amplitudes concretas que os ângulos pudessem ter. Além disso, a notação por recurso a letras únicas facilitou o registo decorrente da observação do esquema, tornando-o mais simples e mais claro, permitindo, assim, que os alunos se concentrassem no essencial (os dois semi-ângulos que juntos formam o ângulo cujos lados são as bissectrizes), e ignorassem o acessório (os ângulos situados no exterior das duas bissectrizes) Os alunos optaram, pois, por tratar implicitamente as situações geométricas como se elas fossem algébricas, assumindo os ângulos como quantidades (Herbst, 2002). A demonstração, nesta tarefa, requer uma linguagem quantitativa para relacionar os objectos geométricos, e portanto pressupõe um tratamento algébrico desses objectos.

A estrutura do argumento

À luz do modelo de Toulmin (1969), vemos que a demonstração algébrica explicita os seus elementos constitutivos, embora de um modo condensado, dada a economia de linguagem que a caracteriza, não sendo alheia a notação algébrica usada. A estrutura de um argumento simples pode ser esquematizada do seguinte modo:

Fig. 2. Estrutura de um argumento simples segundo o modelo de Toulmin (1969)

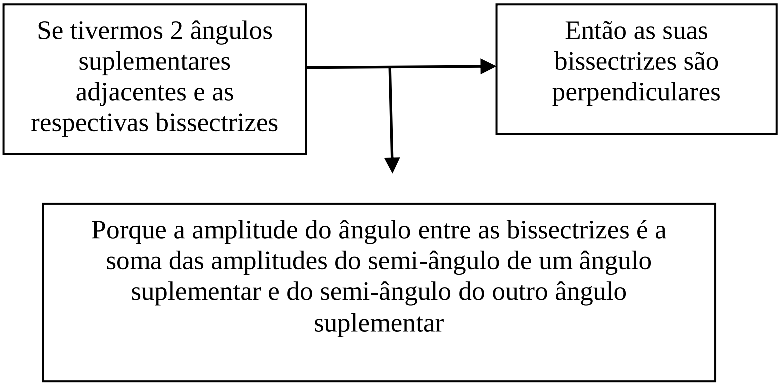
Dados ⟶ Então Conclusão

↓

Porque Garantia

Analisemos a estrutura do argumento explicitado na demonstração algébrica efectuada pelos alunos, através deste modelo:

Fig. 3. Estrutura do argumento alusivo às bissectrizes segundo o modelo de Toulmin (1969)



Assim, a primeira proposição algébrica escrita pelos alunos — “ $2\alpha + 2\beta = 180^o$ ” — condensa a explicitação dos dois dados de que partiram: a amplitude dos dois ângulos suplementares e as respectivas bissectrizes (2α e 2β explicitam o facto de as bissectrizes dividirem os ângulos em dois ângulos congruentes). A segunda proposição — “ $\frac{2\alpha}{2} + \frac{2\beta}{2} = \frac{180^o}{2}$ ” — condensa a explicitação da garantia e prepara já a explicitação da própria conclusão. De facto, é a garantia que torna possível a inferência que conduz à conclusão de que o ângulo entre as bissectrizes medirá sempre 90º, expressa quer em termos algébricos — “α+β=90º” — quer, também, depois, em termos narrativos.

A demonstração narrativa e a comunicação

Nesta tarefa, enquanto os restantes grupos descobriram a relação por meio de uma demonstração algébrica, o Ricardo do grupo-alvo fez essa descoberta, de modo súbito, por intermédio de uma demonstração narrativa. Todos os elementos do grupo começaram a tarefa pelo completamento das frases colocadas na parte superior da folha, em que deveriam indicar o que são ângulos suplementares, o que é uma bissectriz, e dar, ainda, exemplos de notações possíveis para ângulos. Enquanto os colegas de grupo dialogavam em torno do que colocar na última frase, o Ricardo alheou-se, por completo, desse mesmo diálogo e olhava atento para a questão colocada na tarefa. Manteve-se assim totalmente absorto durante dezasseis segundos, parado, sem nada registar, até que, interrompendo os colegas que ainda enunciavam letras do alfabeto grego, exclamou subitamente: “Yaa!! Já sei! Bissectrizes de ângulos suplementares porque somados eles dão um ângulo de noventa graus". Dito isto, fez um gesto de entusiasmo e emitiu um som semelhante a um estampido. Os colegas não reagiram. Vejamos o extracto da transcrição alusivo ao momento seguinte:

> R- Então, eu vou explicar. Vou explicar.
> *O Ricardo começa a fazer um esquema no seu caderno. A Sara escreve na sua ficha e não presta atenção ao Ricardo. O Bernardo e a Maria olham para o caderno do Ricardo.*
> R- (*olhando para o Bernardo, e apontando para o esquema que vai construindo enquanto fala*) Isto é dois ângulos suplementares. Dá cento e oitenta.
> M- Pera [sic] aí que falta a Sara.
> S- (*a Sara começa a olhar e a prestar atenção*) Diz.
> R- Isto são dois ângulos suplementares, dá cento e oitenta. Quando dividimos, é isto e isto (*traça as bissectrizes enquanto fala*).
> S- (*acenando afirmativamente com a cabeça*) É a bissectriz.
> R- Tem calma!... (*a Sara sorri*) Podemos somar estes dois, fica metade de cento e oitenta por fora. Logo, é um ângulo recto. Logo, é noventa graus.
> *Faz-se uma breve pausa.*
> S- Não tou [sic] a perceber. É o quê? É um matemático que temos aqui! A sério, não percebi.
> R- Sei que não percebeste… Também eu. Nem eu percebi.
> S- (*sorrindo*) Ah! Tu não percebeste?! Boa!
> R- Eu tenho a certeza que tá [sic] bem. Mas agora não percebi… (Rodrigues, 2008, p. 682)

Na compreensão da relação entre as bissectrizes, o Ricardo não necessitou de esboçar no papel qualquer esquema. Possivelmente, visualizou-o no curto espaço de tempo em que se fez luz no seu pensamento focado numa dedução lógica, a partir dos únicos dados que possuía: ângulos suplementares e bissectrizes. O raciocínio claramente dedutivo do Ricardo encontra-se evidenciado até no modo como ele usa o termo conclusivo "logo": "Podemos somar estes dois, fica metade de cento e oitenta por fora. Logo, é um ângulo recto. Logo, é noventa graus.". A expressão " metade de cento e oitenta por fora" pretende explicitar que a amplitude procurada é a do ângulo convexo entre as bissectrizes, colocando-a em confronto com a amplitude total dos dois ângulos suplementares — "cento e oitenta por fora" — de forma a estabelecer uma relação entre ambas. O esquema esboçado pelo Ricardo no seu caderno é, de novo, um recurso estruturante, mas desta vez, ao serviço da comunicação com os colegas, decorrendo de um motivo social (Leont'ev, 1978) de explicar, isto é, de tornar o seu pensamento inteligível para os outros, mas sem qualquer ligação com a sugestão, feita no enunciado da tarefa, de elaboração de um esquema.

A comunicação presente no momento, atrás transcrito, vive da convergência da atenção de todos os elementos do grupo. A intervenção da Maria — "Pera [sic] aí que falta a Sara" — é reveladora da prática do grupo de todos os seus elementos serem ouvintes atentos das falas uns dos outros. De facto, a Sara encontrava-se sentada, junto do restante grupo; a referência a "falta a Sara" não se reportava a uma ausência física, mas sim a uma ausência cognitiva. A Maria instou, portanto, o colega a que esperasse um pouco até que a Sara lhe prestasse atenção. Contudo, apesar da convergência da atenção de todos, e dos esforços do Ricardo, as dificuldades de comunicação com os colegas, no sentido de se proceder a uma partilha de significados matemáticos, mantiveram-se, e a Sara, único elemento do grupo a interagir verbalmente à explicação do Ricardo, manifestou a sua incompreensão. Quando o Ricardo diz que nem ele percebeu, tal deve-se à sua dificuldade em comunicar o que pensou, no sentido de o tornar compreensível aos colegas, e não à sua falta de compreensão, conforme ele expressa. Aliás, é essa compreensão que lhe confere a certeza de que está a pensar bem, não duvidando nunca, em toda a aula, dessa mesma certeza. Mas é uma compreensão que ocorreu de forma muito súbita, e o seu pensamento, apesar de evidenciar traços de clareza lógica e dedutiva, é encarado pelo Ricardo como se estivesse em turbilhão, numa fase sincrética, e que necessitasse ainda de ser escalpelizado para que todos entendessem claramente o que ele viu e tem a certeza que está bem. Estamos, pois, na presença da função comunicativa da demonstração. Vejamos como prosseguiu o Ricardo na sua tentativa de explicação:

> O Ricardo apaga o esquema acabado de construir no seu caderno. (…)
> S- (falando para a Maria enquanto esboça um esquema mas com o lápis no ar) Usa os conhecimentos para descobrir isto… Ou seja… Aqui, algumas coisas, estas coisas têm de se aproveitar aqui…
> M- Ângulos suplementares…
> R- (dando seguimento à frase iniciada pela Maria) Cento e oitenta graus. Metade…
> M- A bissectriz…
> R- Dá noventa graus. A bissectriz, dá noventa graus. Usa a metade de um ângulo e a metade de outro. Logo, dá noventa graus.
> A Sara olha para o Ricardo com uma expressão muito atenta.
> R- (falando para a Sara) Não percebeste?
> S- Percebi.
> O Ricardo volta a fazer um esquema no seu caderno.
> R- (olhando para a Sara e depois apontando para o esquema enquanto regista valores numéricos) Por exemplo, por exemplo, vou usar números assim marados, sei lá… Vá… Aqui é sessenta, aqui é cento e vinte. A bissectriz (traça a bissectriz) a fazer isto, dá aqui trinta e aqui sessenta (traça a outra bissectriz). Trinta mais sessenta, noventa. Ângulo recto. Percebeste?
> S- (aponta para o caderno do Ricardo) Silva, (imperceptível) que isto tá [sic] uma grande confusão. Não tou [sic] a perceber nada.
> O Ricardo apaga o esquema com os exemplos acabados de registar no seu caderno.
> R- (olhando para o Bernardo em frente) É metade! Assim, dá um ângulo recto. (Rodrigues, 2008, pp. 682-3)

Esta segunda tentativa parece ter sido mais bem sucedida pois, logo após, a Sara admitiu ter percebido. Mesmo assim, o Ricardo sentiu necessidade de reforçar a sua explicação com o recurso à particularização e à elaboração de um novo esquema, como se não tivesse ficado muito convencido que a Sara efectivamente tivesse compreendido bem. Os exemplos particulares usados não serviram para estudar uma questão geral mas unicamente para ilustrar e, eventualmente, tornar mais compreensível, uma dada propriedade geral.

Foram, portanto, um recurso de comunicação. Após a ilustração com exemplos de amplitudes, a Sara não respondeu directamente à questão do Ricardo sobre se tinha percebido, como se já não precisasse de reafirmar o que já tinha dito antes. A sua intervenção incidiu no esquema elaborado pelo Ricardo e a referência a não estar a perceber nada tem a ver com o esquema que ela considera pouco claro e perceptível, e não propriamente com a compreensão da relação entre as bissectrizes.

Vejamos o que se passou após o momento transcrito acima. Depois de o Ricardo ter apagado o esquema no seu caderno, todos os elementos do grupo ficaram, nuns breves instantes, num certo impasse, sem nada fazer. A professora aproximou-se do grupo pela primeira vez e, de imediato, o Ricardo interpelou-a:

> R- Stora, dá um ângulo de noventa graus. A relação é que faz um ângulo de noventa graus. Agora, não consigo explicar aos outros. Os outros…
> P- Então, mas vamos fazer um esquema. Eu faço aqui uma nota, sugiro, não é? Sugiro… fazer um esquema… façam um ângulo…
> B- (*apontando para o caderno do Ricardo*) Ele já fez aqui, stora. Mas foi uma grande confusão.
> R- Sim, só que eu fiz sem régua… (Rodrigues, 2008, pp. 684)

O Ricardo comunicou a sua descoberta à professora sem explicitar o raciocínio que o conduziu à mesma e sem qualquer pretensão de obter algum tipo de validação, dada a certeza que depositava na sua conclusão, obtida por via demonstrativa. Uma vez que a sua preocupação residia na dificuldade de comunicação com os colegas, partilhou com a professora a sua dificuldade em explicar aos colegas a razão que fundamentava essa mesma descoberta. A professora pareceu ignorar a descoberta do Ricardo, demitindo-se de formular uma validação que pudesse limitar o trabalho a desenvolver pelos vários elementos do grupo. Tentou, simplesmente, dar resposta à dificuldade expressa pelo Ricardo em fazer com que todos os elementos do grupo compreendessem a relação em causa, sugerindo a elaboração do esquema de modo a que todos os alunos do grupo pudessem apropriar-se das relações focadas na tarefa. Foi uma intervenção didáctica que remeteu o trabalho ao grupo, exactamente para um ponto de partida inicial, como se nenhum dos seus elementos tivesse alcançado qualquer conclusão, visando assim que todos se envolvessem no trabalho matemático.

O modo como o grupo-alvo desenvolveu a seguir o seu trabalho conduziu-o à concretização da demonstração algébrica, negociada com a professora. O registo escrito do grupo não apresenta qualquer marca da demonstração narrativa e informal nos termos em que o Ricardo a comunicou oralmente aos colegas.

A explicitação narrativa pôs a descoberto a explicação da razão por que se verifica a propriedade de as bissectrizes de ângulos suplementares adjacentes serem perpendiculares. Assim, a função explicativa da demonstração está muito mais presente na sua forma narrativa do que no formato algébrico.

Eventualmente, os alunos, numa resolução algébrica, poderão chegar à soma dos dois semi-ângulos através da aplicação de uma regra habitualmente aplicada na resolução de equações (se se divide por dois todos os termos de um membro da equação, também se divide por dois o termo do outro membro da equação), sem compreender efectivamente a relação em causa. Ou seja, poderão, meramente, aplicar um procedimento algorítmico sem verdadeiramente raciocinarem dedutivamente.

Em suma, as funções de explicação e de comunicação encontram-se intimamente associadas. A função comunicativa acabou por constituir uma motivação para o Ricardo proceder à explicação da relação encontrada por si. Trata-se de um motivo social (Leont'ev, 1978) pois, genuinamente, o Ricardo estava interessado em partilhar, com os colegas de grupo, algo que ele descobrira e que nenhum dos outros ainda compreendera.

A prática social

Nesta tarefa, no que respeita ao trabalho do grupo-alvo, a descoberta da solução do problema foi feita por intermédio de uma demonstração narrativa e informal, construída individualmente pelo Ricardo, de um modo súbito, por *insight*. Não existiu qualquer relação entre essa mesma concretização e as interacções sociais no seio do grupo. Todo o esforço posterior do Ricardo em partilhar a sua demonstração com os colegas do grupo embateu nas dificuldades de comunicação inerentes à prematuridade do momento em que ocorreu essa partilha, já que os colegas de grupo do Ricardo ainda não tinham percorrido o seu próprio processo de apropriação do sentido da tarefa. Assim, embora o Ricardo tenha sido o único detentor do significado original da demonstração, na sua fase de estágio, nunca o ocultou dos restantes elementos do grupo; pelo contrário, usou diversos recursos, incluindo o da particularização e o esboço de esquemas, para tornar transparente o seu processo individual de construção de raciocínio.

A construção posterior de uma demonstração algébrica, apesar de orientada pela professora, teve uma participação mais dominante por parte do Ricardo. Assim, apesar da sugestão inicial da professora, para que começassem pela elaboração do esquema, visar, em princípio, a apropriação da tarefa por todos os elementos do grupo, existiu em todas as fases da exploração da tarefa (após esta intervenção da professora) um protagonismo do Ricardo, já que este foi o primeiro a elaborar o esquema e também o primeiro a construir a demonstração algébrica, sem receber dos colegas contributos para esse efeito. Até na elaboração da resposta, apesar de escrita simultaneamente por todos os membros do grupo, foi sempre ditada oralmente pelo Ricardo. Assim, a Sara, a Maria e o Bernardo elaboraram individualmente os seus próprios esquemas mas sempre com o apoio do esquema já construído do Ricardo, necessitando, de vez em quando, de olhar para a ficha do Ricardo para irem aferindo da correcção dos seus esquemas. Para o registo da demonstração algébrica, os colegas de grupo do Ricardo copiaram a mesma pelo Ricardo, colocando mesmo a sua ficha no meio da mesa.

Os colegas do Ricardo passaram, pois, por um processo de ventriloquismo, apropriando-se, pouco a pouco da sua voz e, decorrentemente, do significado matemático da demonstração narrativa e da demonstração algébrica presentes no trabalho do grupo com esta tarefa. Quando a Sara afirmou ter percebido as palavras do Ricardo, ainda antes da elaboração do esquema, já estava a entrar um pouco no território do colega, fazendo suas as palavras daquele. Talvez por isso, quando acabou o esquema, a Sara já se sentisse capaz de dar uma resposta à questão: o esquema encerrava, em si, uma relação geral que lhe era compreensível e que ela pensava conseguir traduzir utilizando um modo narrativo.

O padrão de interacção do grupo também nesta tarefa se mantém: o Ricardo detentor de um poder superior ao dos colegas, logo seguido pela Sara, nessa hierarquia. A comunicação do Ricardo é dirigida essencialmente à Sara, sendo também um pouco dirigida ao Bernardo. O facto de ser a Sara a verbalizar a sua incompreensão das palavras do Ricardo constitui, de igual modo, um sinal evidenciador do grau elevado de participação da Sara no grupo. Tanto a Maria como o Bernardo, menos participativos, ao silenciarem a sua incompreensão, acabam por fazer uma caminhada de apropriação menor do que a manifestada pela Sara. No entanto, existe um momento em que a Maria assume um maior protagonismo do que o habitual. Quando o Ricardo tenta, pela segunda vez, comunicar a sua descoberta aos colegas, ambas as vozes, a da Maria e a do Ricardo, se complementam, revelando uma clara sintonia e uma actualização de significado matemático por parte da Maria: "M- Ângulos suplementares…; R- Cento e oitenta graus. Metade…; M- A bissectriz…; R- Dá noventa graus.".

Durante a exploração da tarefa, existiu em todos os elementos do grupo um crescimento de posse de significado matemático, embora em diferente grau. O Ricardo, apesar de manifestar uma compreensão por *insight*, percorre um caminho de aprofundamento dessa mesma compreensão, sempre que tenta explicitá-la aos colegas, tanto que é ele próprio que, inicialmente, afirma ter a certeza de que está bem mas que não percebe.

A CONCLUIR

A comunicação, sendo um processo didáctico em que intervêm professor e alunos, consiste essencialmente numa troca e partilha de significados (Bishop e Goffree, 1986), inscrita necessariamente num processo de negociação, em que professor e alunos procuram atingir os respectivos objectivos. A negociação constitui uma condição necessária à aprendizagem de Matemática quando o conhecimento prévio dos alunos é diferente do conhecimento que o professor pretende que eles venham a ter. De acordo com Voigt (1994), o discurso na sala de aula é caracterizado, precisamente, por esta diferença, que constitui a norma e a essência da respectiva função dialógica, geradora constante de novos significados (Wertsch, 1991). No caso da demonstração, esta é um objecto de intervenção curricular, e por conseguinte, de negociação, já que não será expectável que os alunos enveredem por processos demonstrativos, de forma espontânea, dada a sua tendência a validar resultados com base em evidência empírica.

O professor detém um papel decisivo no processo da introdução da demonstração na aula de Matemática e da negociação da sua importância. É o professor que, na qualidade de mediador cognitivo e cultural, negociará, de uma forma progressiva, com os seus alunos, o estatuto de uma conjectura, a necessidade de procederem a uma demonstração, o estatuto da verificação empírica no que respeita à validação das afirmações matemáticas, e o significado de uma demonstração. É o professor que, através de um discurso questionador, baseado na procura dos porquês, incentivará os alunos a justificar, a explicar, a fundamentar as proposições matemáticas. Quando o professor negoceia com os alunos o campo de argumentos (Toulmin, 1969) próprio da matemática, está, efectivamente, a negociar na sua sala de aula, normas sociomatemáticas (Yackel e Cobb, 1996) específicas da aula de Matemática (Balacheff, 1991), assumindo um papel de representante de valores culturais próprios da matemática. Em particular, a prática de um professor se demitir de validar e legitimar as conclusões dos alunos quando estes ainda se encontram numa fase de exploração da tarefa, acaba por se prender com a norma sociomatemática do que consiste uma validação aceitável, levando a que os alunos procurem uma legitimação no interior do quadro teórico da matemática, e não uma legitimação baseada unicamente na autoridade do professor.

A certeza, sentida pelos alunos, proveniente da demonstração dedutiva evidencia que esta é, efectivamente, anti-autoritária (Hanna, 1996), na medida em que a validade da conclusão é estabelecida pela transparência da explicitação das regras de raciocínio da própria demonstração, e não por uma autoridade externa. Esta certeza advém da força conferida à conclusão pela garantia (Toulmin, 1969) justificativa usada que autoriza os alunos a aceitar necessariamente e sem equívoco essa mesma conclusão. Assim, a força conferida pela garantia varia em função do campo de argumentos, uma vez que a garantia inscreve-se nas normas de argumentação de um dado campo específico. Enquanto em matemática, a garantia leva a aceitar a conclusão na ordem do necessário, no campo de argumentos da vida quotidiana, a garantia poderá justificar a conclusão na ordem do provável ou do possível.

Os diferentes poderes de cada um dos elementos do grupo consubstanciam diferentes identidades (Wenger, 1998), influenciando o modo de os alunos se convencerem acerca da verdade das afirmações matemáticas. O grau de participação no trabalho é também associado ao poder e identidade de cada um. Assim, os alunos com maior poder no grupo são também os alunos que têm uma identidade de participação na prática do grupo. O envolvimento mútuo entre os diversos elementos do grupo cria relações caracterizadas por uma mistura de poder e de dependência. O equilíbrio de poderes não só permite a emergência da argumentação como também a explicitação verbal das ideias matemáticas. Por conseguinte, o diálogo, ocorrido no seio do grupo, toma especificidades individuais e simultaneamente sociais, consoante o poder social de cada um e a teia de interrelacionamentos desenvolvidos no grupo. Apesar de existir a tendência, no grupo-alvo, de as ideias do Ricardo serem adoptadas pelos restantes elementos, sem que seja necessário usar a persuasão através de palavras, o discurso do Ricardo é persuasivo, nunca tentando impor os seus pontos de vista. É um aluno que, habitualmente, argumenta, justifica, explica e fundamenta as suas afirmações.

A explicação, encetada no seio do grupo-alvo, principalmente pelo Ricardo, torna-se objecto de reflexão (Yackel e Cobb, 1996), uma vez que o aluno teve de atender à adequação da mesma para os colegas do grupo, de forma a ser entendida. O Ricardo opera uma mudança no seu pensamento, em que a explicação passa de processo (participar numa explicação) a objecto (reflectir sobre a explicação e agir em conformidade). Tal como apontado por Yackel e Cobb (1996), a explicação é um acto comunicativo que visa a clarificação de aspectos do pensamento matemático de um sujeito que podem não ser visíveis a outros. Segundo Kieran (2002), trata-se de um acto que pode ser difícil de pôr em prática, principalmente quando os alunos se envolvem em situações problemáticas novas. "Making one's emergent thinking available to one's partner in such a way that the interaction be highly mathematically productive for both may be more of a challenge to learners than is suggested by the current mathematics education research literature" (Kieran, 2002, p. 220). Tendo uma função inerentemente social, a explicação acaba por conduzir a uma maior clarificação conceptual do próprio sujeito. De facto, nesse processo de explicitação e de partilha, o Ricardo foi ampliando a sua compreensão matemática, e o modo integral como ele tomou posse do significado da demonstração é revelado pelo modo e grau com que usou e afirmou como seus os significados matemáticos negociados com os colegas.

E sendo a aprendizagem uma característica da prática, a aprendizagem da demonstração, em particular, é feita pelo grupo. Apesar de, na tarefa analisada neste artigo, a origem da demonstração se colocar a título individual, ela é depois assumida enquanto prática social do grupo. Quando a posse de significado é partilhada, existe um crescimento da mesma em todos os membros do grupo (Wenger, 1998).

REFERÊNCIAS

Alibert, D., e Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). Dordrecht: Kluwer .

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interactions: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen e J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer

Benson, D. (1999). *The moment of proof: Mathematical epiphanies.* New York: Oxford University Press.

Bishop, A., e Goffree, F. (1986). Classroom organisation and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Boavida, A. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Brendefur, J., e Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 125-153.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Brown, A., e Dowling, P. (1998). *Doing research/reading research: A mode of interrogation for education.* London: The Falmer Press.

Carrilho, M. (1990). *Verdade, suspeita e argumentação*. Lisboa: Ed. Presença.

Chazan, D. (1993). High school geometry students'justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Cobb, P., Wood, T., e Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. In E. A. Forman, N. Minick e C. A. Stone (Eds.), *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children development* (pp. 91-119). New York: Oxford University Press.

De Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science,* 397-418.

De Villiers, M. D. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática, 63*, 31-36.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233-261.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de Matemática: A demonstração em geometria* (tese de doutoramento, Universidade de Aveiro). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In L. Puig e A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 21-34). Valencia: Universitat de Valencia.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2): Proof in Dynamic Geometry Environments, 5-23.

Hanna, G., e Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 421-438.

Hanna, G., e Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G., e Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: Information Age Publishing Inc., e NCTM.

Healy, L., e Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396-428.

Herbst, P. G. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(3), 176-203.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 389-399.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Nova Iorque: Oxford University Press.

Kieran, C. (2002). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. In C. Kieran, E. Forman e A. Sfard (Eds.), *Learning Discourse: Discursive approaches to research in mathematics education* (pp. 187-228). Dordrecht: Kluwer

Lave, J. (1997). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life.* Cambridge: Cambridge University Press.

Leont'ev, A. (1978). *Activity, consciousness and personality*. New Jersey: Prentice Hall.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2): Proof in Dynamic Geometry Environments, 25-53.

Merriam, S. (1991). *Case study research in education: A qualitative approach* (2ª ed.). São Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Meyer; M. (1982). *Logique, langage et argumentation* (2ª ed.). Paris: Hachette.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

Perelman, C. (1987). Argumentação. In *Enciclopédia Einaudi: Oral/Escrito Argumentação* (Vol. 11, pp. 234-265). Lisboa: Imprensa Nacional.

Recio, A., e Godino, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 83-99.

Rodrigues, M. (1997). *A aprendizagem da Matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: A.P.M.

Rodrigues, M. (2000). Interacções sociais na aprendizagem da Matemática. *Quadrante*, *9*(1), 3-47.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Simpson, A. (1995). Developing a proving attitude. In Institute of Education (Ed.), *Conference Proceedings: Justifying and Proving in School Mathematics* (pp. 39-46). London: University of London.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *15*(1), 29-37.

Toulmin, S. (1969). *The Uses of Argument*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 275-298.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, Meaning, and Identity.* Cambridge: Cambridge University Press.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the mind: A sociocultural approach to mediated action.* Hempstead: Harvester Wheatsheaf.

Yackel, E., e Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27,* 458-477

Community of learners with technologies

Ornella Robutti
Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Abstract

Community of learners are groups of people (students, or adults) involved in an educational activity with common aims: to learn together, sharing materials, work, contents, objectives and so on. If this educational activity is supported by technologies, we can speak of e-learning and have activities made in classes, face-to-face, or made at distance, with the mediation of a platform. Technology setting can influence the different students' multimodal production, in terms of words, gestures, inscriptions, actions on the artefacts. A semiotic-cultural framework is used to analyse classroom activities, where students employ such new technologies. Particularly, it is showed how the variety of inscriptions given by technological environments can support the students' multimodal production, interaction and communication, when they are engaged in constructing mathematical meanings. Two new affordances of technology are described in the data shown: hand-held environments connected with software for sharing data among all the students and an e-learning platform. Both of them support processes of students working together as a community of learners, sometimes in similar ways, other times differently

Nowadays teachers and students are faced with tools where the usual constraints of paper and pencil are radically changed (Bartolini Bussi & Borba, 2010; Drijvers et al., 2010; Beatty and Geiger, 2010): instead of a static environment they have a dynamic one; instead of one world they have more worlds (numerical, symbolic, graphical) usually connected together in interactive way; instead of having only a representational tool, they have also a communication tool. In fact, today technology can both give data in various formats, and simultaneously can support communication between students and between students and the teacher, according to affordances consonant with common tools that people use in their everyday life (for example, think of calculators, platforms, smartphones or other tools).

These possibilities open new frontiers and enlarge the usual boundaries of technology used in mathematics education, insofar as it overlaps the technologies of everyday life. Any research about learning processes in technological environments today should also be sensitive to the integration of technologies of "old" and "new" generation (Robutti, 2010). In fact, it is a matter of re-mediation (Bolter & Grusin, 2000), because new media achieve their cultural significance by paying homage to earlier media: e.g., a DGE re-mediate static geometry with compass and ruler. Anyway, from an educational point of view, it is not sufficient to repeat with a media the traditional activities made in paper and pencil, but it is indispensable to introduce also new methodologies, which can give different approaches to mathematics.

Therefore, today it is necessary to update the classical institutional and cultural dimensions of education for doing research on the teaching and learning of mathematics with technological environments. If recent approaches on the use of technologies are based on the instrumental framework, introduced by Verillion and Rabardel (1995) (for example, Mariotti, 2002; Artigue, 2002; Straesser, 2009), and based on the distinction between artefact and instrument, other characteristics enter in the last years with the use of technology. In the educational field, as well as in other fields of the society, technological tools may be fix or portable, may have different environments (geometric, symbolic, numeric, graphic, statistical, data-capturing, …) and may be concurrently representational, computational or communicative tools. These multiple instruments in the same artefact, according to the schemes of use introduced by the subject, can offer different inscriptions and can support a multimodality of communication and interaction in the subjects who are using them.

In this paper I analyse how community of learners – groups of students – are involved in an educational activity, having common aims and using technologies. Since technology setting can influence the different students' multimodal productions, in terms of words, gestures, inscriptions, actions on the artefacts, I use a semiotic-cultural framework for analysing classroom activities, where students employ such new technologies. Particularly, it is showed how the variety of inscriptions given by technological environments can support the students' multimodal production, interaction and communication, when they are engaged in the construction of mathematical meanings. Two new affordances of technology are described in the data shown: hand-held environments connected with software for sharing data among all the students and an e-learning platform. Both of them support processes of students working together as a community of learners, sometimes in similar ways, other times differently. A semiotic-cultural lens can give us information on the production and evolution of signs, such as words, gestures and inscriptions in students interacting with technologies.

STUDENTS-WITH-TECHNOLOGIES

Communities of learners

> "Communities of practice are formed by people who engage in a process of collective learning in a shared domain of human endeavor: a tribe learning to survive, a band of artists seeking new forms of expression, a group of engineers working on similar problems, a clique of pupils defining their identity in the school, a network of surgeons exploring novel techniques, a gathering of first-time managers helping each other cope. In a nutshell: Communities of practice are groups of people who share a concern or a passion for something they do and

learn how to do it better as they interact regularly." With these words, E. Wenger, the inventor of the term community of practice, explains on his website what it means (Wenger: http://www.ewenger.com/theory; Wenger, 1998).

Communities of practice are groups of people who share an interest, a scope, a challenge, and so forth: they group spontaneously and they meet and work together. The characteristics of such communities of practice can vary, according to the context and the interests and tasks of participants. Some communities of practice are quite formal in organisation; others are very fluid and informal. In this respect, a community of practice is different from a community of interest or a geographical community in that it involves a shared practice.

Communities of learners are less spontaneous than communities of practice (Bos-Ciussi et al., 2008). A class of students is a community of learners, in that students take part in the construction of consensual domains, and "participate in the negotiation and institutionalisation of ... meaning" (Roth & Lee, 2006). In a learning community in fact, the educational goal is to let collective knowledge advance, in a way that supports the growth of individual knowledge (Bielaczyc & Collins, 1999). Students are engaged in a social process of construction and institutionalisation of meanings, and in doing so, they learn as individuals. Teacher is part of the community of course, and take place in the process of construction of knowledge, designing and guiding it, or coaching from one community to another one (Rasmussen et al., 2009). For rendering meaningful this process, teacher project activities in fields of experience that can engage students with motivation and spirit of collaboration. In fact, it makes no sense to talk of knowledge that is decontextualized, abstract or general (situated cognition, Lave & Wenger, 1998).

Representational and communication infrastructures

Thanks to the introduction of representational, computational and communication infrastructures, nowadays it is possible a "technological" approach mathematics in learning communities, both face-to-face and at distance. The presence of these infrastructures can modify, support, and enlarge the possibilities of learning for students in their curricular path, as showed in literature (Arzarello & Robutti, 2010).

Hegedus and Moreno-Armella (2009) describe the recent evolution of educational technology developing further the analysis made by J. Kaput (Kaput et al., 2002). Observing that software has become more interactive and dynamic, that hardware has evolved towards more complex programs usable directly or at distance, that tools are more transportable (handheld technologies), they point out the importance of:

1. Representational Infrastructures.
2. Communication Infrastructures.

They outline that technology offer representations in terms of symbolic manipulators where computational duties are offloaded to the microprocessor and new actions are linked to traditional notations systems. The novelty is that these infrastructures support new interactive notation systems, such as programming languages underlying mathematics packages or spreadsheets, which enhance interactivity, linking traditional notations systems and representations to new ones. These affordances make new capabilities accessible to students, for example the ability to see through abstract constructs or symbolic figures (Hegedus & Moreno-Armella, 2009).

Such infrastructures, which have independently evolved, nowadays may intersect each other, and when it happens, this intersection can support and enhance the evolution of meaning (especially in an educational context), because traditional forms of expression are transformed or enabled (think for example to the possibility to make a chat, a forum, or a blog on mathematics). According to Hegedus, "the heart of such convergence is a transformation of expression, and what we prefer to call representational expressivity, where learners can express themselves through the representational layers of software and where a participatory structure enables learners to express themselves in natural ways through speech acts (e.g., metaphors, informal registers and deixis) and physical actions (e.g., gesture or large body movements)." (Hegedus & Moreno-Armella, 2009, p. 400). An environment that coupled with mathematically meaningful curriculum activities is motivating and interesting for students, who feel involved and engaged in it and interact together, with actions that identify themselves in classroom discussion, and than attach themselves to a representational artifact. But it is also motivating and interesting for the teacher, who designs activities on the basis of its affordances and schemes of use.

Humans-with-media

Humans-with-media is a theoretical approach that takes both the subject and the tool into account (Borba & Villarreal, 2005) and it is grounded on two ideas:

1. The construction of knowledge is made in a social way by subjects working together;

2. The media involved are part of this construction, because they collaborate in re-organising thinking with a different role than the one assumed by written or oral language.

Authors introduce a point of view that contains and enlarges previous instrumental approaches, because they particularly focus on the community of learners (small groups, as well as the whole class or bigger groups), along with the tools. This point of view overcomes the traditional dichotomy between humans and technology, because it considers humans interacting as a community and this community includes tools. Media interact with humans in the double sense that technologies transform and modify humans' reasoning, as well as humans are continuously transforming technologies according to their purposes. This theoretical issue seems to integrate the point of view of the communities of practice and that of representational and communication infrastructures. Authors are also interested in analysing the features of communication at distance (with the double possibility to be synchronous or a-synchronous), thanks to modern platforms on the web.

Multimodal approach

The notion of multimodality has evolved within the paradigm of embodiment, which has been developed in these last years (Wilson, 2002). Embodiment is a current movement in cognitive science that grants the body a central role in shaping the mind (Lakoff & Núñez, 2000). The term multimodality is used in various fields with different connotations, from neurology to linguistics, till to mathematics education.

In neuroscience, researchers say that the sensory-motor system of the brain is multimodal, rather than modular: "an action like grasping ... (1) is neurally enacted using neural substrates used for both action and perception, and (2) the modalities of action and perception are integrated at the level of the sensory-motor system itself and not via higher association areas." (Gallese & Lakoff, 2005, p. 459). "Accordingly, language is inherently multimodal in this sense, that is, it uses many modalities linked together—sight, hearing, touch, motor actions, and so on. Language exploits the pre-existing multimodal character of the sensory-motor system." (ibid., p. 456).

In communication science, multimodality is the use of two or more forms of communication from the two main modalities, namely auditory and visual (Loncke et al., 2006) and is deeply intertwined with perceptuo-motor activities. The word reading today has a more general meaning than years ago: it does not refer any more only to read sequentially a book, but it can refer also to read a website, where verbal information is deeply interconnected with images, sounds, or movies too (Simone, 2000). So, read today means not only to follow a sequence of verbal information, but also listening to sounds, looking images and so on, in a structure that could be a net and not a sequence of information.

In the education field, interests in multimodality have been generated by the increasing use of multimedia in the classroom, from image manipulation software to electronic music-making packages, to science simulations, and to virtual reality that exists on computers.

Not only sensory-motor system of human brain is multimodal, but also human activity (communication, action, interaction), and therefore we can analyse all the modalities, in order to understand cognitive processes (Arzarello & Edwards, 2005). During the mathematical activities with media, students produce a variety of signs as words, gestures, and actions on the tools that are written or oral signs of whatever nature. Their multimodal production can be analysed and we can infer if and how it has be influenced by the use of technologies. We conjecture that this production is particularly rich when subjects use technologies as calculators with Navigator, or Moodle, tools that can amplify multimodality with their various environments. In fact, teacher and students use a wide array of verbal, gestural, and graphic registers to communicate their thought and often they are influenced by data coming from the tool used.

We consider students engaged in mathematics activities with tools as students-with-technologies, working as a community of learners and interacting together, with the teacher and with the technologies. Looking at their production is the aim of the paper, particularly if influenced by the tools themselves. This multimodal production is made of many kinds of signs, and can be called multimodal expressivity.

MULTIMODAL EXPRESSIVITY

In this paper, I present two examples of activities with the use of technologies: the first in secondary school (10th grade), where students are involved in modelling activities, and the second in junior secondary school (6th grade), with pupils engaged in a blended approach to early algebra.

In the first teaching experiment students use graphic calculators connected with teacher's computer through the software TI-Navigator that supports wireless exchange of data between students' calculators and teacher's computer. In the second teaching experiment students used a Moodle platform for interacting at distance, both in synchronous and a-synchronous way.

Both of them offer multi-representational environments (Arzarello & Robutti, 2010), in the sense that students have at their disposal more different inscriptions (numerical, graphical, and symbolic) of the same mathematical objects. Moreover, TI-Navigator offers the possibility of sharing these representations on the teacher's screen, which is visible to the whole class if it is connected to a projector. On the other hand, Moodle gives a sharing of data, which can be synchronous or a-synchronous and always at disposal of students, not only in class.

Two main affordances feature these two technological environments:

i. the face-to-face interactions between the students and between the teacher and the students (supported by the TI-Navigator device);

ii. the distance interactions between the students and between the teacher and the students (offered by the platform Moodle).

These affordances have consequences for the different modality of behaviours activated by students during their learning processes: for example on their verbal, written, or gestural productions. For these affordances, both the technologies are concurrently representational and communication infrastructures, and of course they can support students' multimodal expressivity. Moreover, they represent a novelty in the panorama of ICT for education, and it is natural to investigate in which ways such novelty support expressivity in a community of learners, influence processes and products of that community, and also can change teachers' practices.

Observing such expressivity from a semiotic point of view and taking into account not only words, but also all the forms of communication, including gestures and inscriptions on paper, on a computer or on a calculator, we analyse the production in the community of students-with-technologies. This production, if considered composed by signs of different nature (such as gestures, actions, words, inscriptions, …), is students' multimodal expressivity.

MATHEMATICS LABORATORY

The didactical methodology used in classroom follows the approach of the mathematics laboratory, (Chapman & Robutti, 2008), and it is based on various and structured activities, aimed at the construction of meanings. In a mathematics laboratory people work as in a Renaissance workshop, in which the apprentices learned by doing, seeing, imitating, and communicating with each other; namely practicing. The construction of meanings is supported by tools and is mediated by interactions between learners in the community, considering tools included in the community. This way of working is typical of perceptuo-motor activities described in literature (e.g., Nemirovsky, 2003), where students are involved in solving mathematical problems individually or in groups.

In the first teaching experiment, the students work together in small groups (two, or maximum three members) with tools and have to fill in a worksheet for each activity done. Each group uses one calculator and one worksheet. We made this choice in the research group, in order to favour interaction as much as possible. Groups are located in computer laboratory. They have to read the task, think of a solution, discuss together and find a resolution using the calculator, and then they have to fill the worksheet in, as final report of the group. During the group activity, the teacher and one observer look at what students are doing and possibly interact with them, never giving the solution, but stimulating them in finding it. His/her role is to ask questions as "why", "explain", "what … if …" and so on, to stimulate argumentation and explanation. Group activities are always followed by collective discussions orchestrated by the teacher, who leave the students free to discuss, compare, conjecture, imagine, and connect various ideas and concepts.

Students are involved in exploring numerical sequences, to find patterns, formulas and functions and to represent them on graphs in the calculator environment. As cognitive roots (Tall, 1989) for the description of functions we choose the qualitative concept of invariance (of shape on a graph) and the quantitative concept of slope on an interval (as ratio of increments). Activities are centred on families of functions, principally linear, quadratic, cubic, and exponential, and the construction of meaning starts from modelling problems.

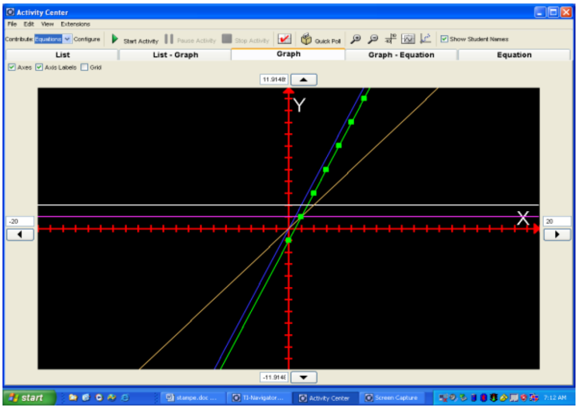
In the second teaching experiment, students work in small groups followed by collective discussions as in the first experiment, but the presence of the platform let them discuss, interact and work also at distance, in the virtual class created in the platform. The platform in fact is a virtual place for participating to synchronous activities (chat, coordinated by a tutor, a master degree student), or to a-synchronous activities (forum of discussion, upload or download of files, home-works with deadlines), where the role of the teacher or of the observer is again that of mediation and support to the students' construction of meaning, as in the classroom.

Teachers of the two classes participated with researchers in planning: activities, technologies' orchestration (Trouche, 2004), and didactical methodologies. In both classes a master degree student in mathematics education used a video-camera to record the activities, in order to analyse videos and write protocols. We chose to film with one video-camera, moving in the class, in order to follow activities of students in groups, interventions of the teacher or of students during the collective discussions. Data are made of films, worksheets, pictures extracted from the films and files from the technology used.

TI-NAVIGATOR AND MULTIMODAL EXPRESSIVITY

The first teaching experiment, carried out at the 10th grade, and focused on functions as models of situations, is supported by calculators and TI-Navigator. Students have at their disposal one calculator per group, to work with, and one paper-sheet to write results. They work on the group calculator and share results in the group, but their results (as well as those from other groups), are visible also on the public screen projected on the wall (as explained previously). The public screen consists of a common Cartesian plane (called Activity Center), to which each student and the teacher can give their personal contribution, inserting mathematical objects as points, lines, and so on (Figure 1). The teacher may remain in a central position, following all the works on the big screen, discussing with a single group, or guiding a class discussion where everyone can take part, because information is shared.

Figure 1: Activity Center.



In one of the first activities, students have to find the various terms of a numerical sequence as coordinates of points, and to send them to the public screen, where they are represented altogether. Pairs of students carry out the activity with one calculator (TI-84) connected to the public screen and one worksheet, to be filled in.

> Consider the point P0 (0, -1). Find the coordinates of P1 , by adding 1 to the abscissa of P0, 2 to its ordinate. Represent the point on the Cartesian plane. Find P2, adding 1 to the abscissa of P1, 2 to its ordinate and represent P2. Now find P3, P4 and so on. Write the sequence of the points P0, …, P6. How do you pass from one point to the subsequent? What are the coordinates of P10? Explain how to determine P100 and what the rule is.

The aim of the activity is the model (linear function), expressed both in recursive form (xn=xn-1+1, yn=yn-1+2; with x0=0, y0=-1), and with a formula (xn=n, yn=2n-1).

In the following we have the excerpts from one group, made by the students Ca and An, medium achievers, well integrated together and in the classroom.

Figure 2: Gesture with the pencil.

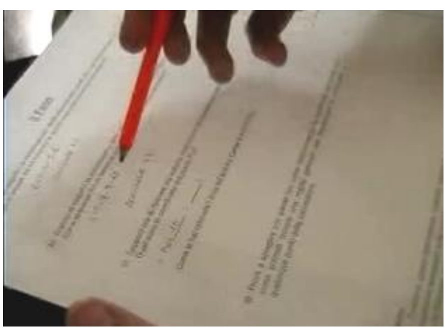
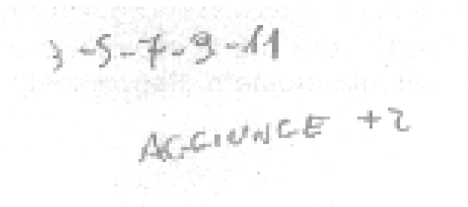


Figure 3: “It adds +2”.



At the beginning the two students try to construct a meaning for the sequence, in order to understand that with the abscissas they have to add 1 and with the ordinates they have to add 2. The signs they introduce in this activity are: actions with the pencil (Figure 2), inscriptions on the paper (Figure 3), gestures with the hands, words, and show the multimodality of their production.

Telling the sequence of ordinates, understanding that the rule for passing from one to the other is adding 2 constitutes the first step of construction of meaning. The signs involved in this step are:

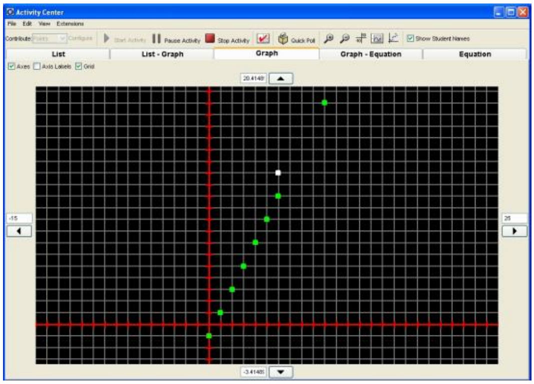
- The beating of pencil on paper (Figure 2).
- The sequence of numbers pronounced by the two students.
- The same sequence written on the worksheet (Figure 3).
- The rule (adding 2), first pronounced orally.
- The rule (adding 2), written on the paper (Figure 3).

The meaning constructed now is the rule that serves to pass from one ordinate to the subsequent one of the sequence of points. But at the moment they have no idea of how to find any elements of the sequence, knowing the position it has in the sequence.

The second step is marked by a recursive interpretation of the rule, but it is not yet the formula they can apply to find whatever point (knowing its place in the sequence). The passage from recursion to formula is not simple for the students, because they have never met it before and they never had to make this explicit it in such a way. Some groups of students were able to find it, other groups found some difficulties, and made various kinds of mistakes.

At the end of the group work, a discussion takes place. If students have worked till now in groups with calculators, (only with a representational infrastructure), now in the collective discussion the role of the public screen given by Navigator opens new possibility and transform the instrument into a communication and representation infrastructure (Figure 4). The public screen makes the difference in the discussion, because it is the catalyst of gazes, gestures and words of students, and supports the teacher in the mediation of meaning construction.

Figure 4: the Activity Center on the public screen



The teacher starts the discussion with an attention to the objects on the Cartesian plane (Figure 4). In the following, Th means teacher, St a group of students answering together, and other names denote particular students.

1.Th: What do you observe in the points you found?
2 Ca: They are a straight line (Figure 4).
3.Th: Yes, they are a straight line. Except that one, which seems to be out of place. Why is it out of its place?
4.Ma: We calculated incorrectly.
5.Th: You calculate wrongly. What are the coordinates of the point, which seems out of place?
6.Ma: (6,13).
7.Th: Why doesn’t it work?
8.Ma: Because I added … I had to put (6,14), then it resulted to be more in this direction. [with a gesture he shows the direction (Figure 5)].
9.Th: (6,14) do you agree? You also put (6,14)?
10.St: (6,11).
…
17.Th: Why 11 and not 14?
18.Ma: The last point before was (5,12).
19.Th: (5,12) Do you also have (5,12)?
20.St: No, (5,9).
21.Th: And then, the one before how much was that?
22.St: (4,7).
23.Ma: (4,10).
24.Th: We are coming back. Let’s start from the beginning. What is the first point?
25.St: (0,-1).
26.Th: (0,-1). This was the point we called P0.

Figure 5: Ma's gesture for aligning the wrong point.

The teacher echoes the voices of some students who recognised the straight line, and introduces a new sign ("except one") to underline that one point is not aligned with the others. So, she begins a discussion on the reasons for what it is not aligned. And she goes back to the first point of the sequence, in order to understand the process followed by Ma and his classmate, to obtain such a wrong value (6,13). The two students in fact recognised the rule (adding 2), but applied it in a wrong way. Multimodal expressivity here is enriched by the collective feedback given by Navigator on the students' production. Everyone in fact can see on the public screen the point that is not aligned, so the discussion is a process of sharing results and justifying them.

The signs introduced in this collective step of construction of meaning are:

• The straight line introduced by the students as model of the situation;

• The words for saying that one of the points seems to be "out of place" (#3).

• Ma's gesture that shows the correct direction in which he wants to move his point in order to put it in the right place (Figure 5). This gesture is possible thanks to the public screen that represents all the points given by the other groups.

• Ma's wrong coordinates of the point not aligned (influenced by the process followed during the group activity).

• Teacher's words to follow Ma's reasoning in order to correct and to aligne the point. In a process of going back, form the end, until arriving to the first point of the sequence, the teacher supports the students in comparing the correct with the wrong coordinates, discovering the pattern followed by Ma and Ba. This comparison is useful not only to this pair of students, but also to the others, who can be aware of the processes.

All these signs are related each other, because one is substituted by another or is transformed into another. The role of the public screen here is to make what the students did in the groups visible and represent a novelty with respect to work done with the calculators alone. The public screen supports multimodal expressivity of the community, both students and teacher. And it can be considered part of the community of humans, in the sense that Borba and Villarreal (2005). Its presence is not neutral, and it gives the students the possibility of sharing results, having an immediate feedback, positive or negative, or of introducing a new sign (e.g., the straight line).

MOODLE AND MULTIMODAL EXPRESSIVITY

The second teaching experiment, carried out at the 6th grade, is focused on and early approach to algebra, with particularly attention to sequences and patterns of generalisation, and equations (approached with the balance). Students usually work in small groups and then discuss their results in the whole group class, guided by the teacher. Furthermore, as previously explained, they always have the possibility to work at distance through a Moodle platform, on a server of the Department of Mathematics of the University, supported by their teacher and by a mathematics student who takes the master degree with the author. The teacher interacts with the groups, guides the collective discussion, does the institutionalisation and interact with students at distance, via forum chat, and so on, in Moodle. The e-learning platform of this class is part of a large project of research in mathematics education, involving teachers (in longlife learning) or students (of many classes by different schools), as communities of learning (http://teachingdm.unito.it/mediaquarini/, Figure 6).

Figure 6: Moodle Quarini: the platform used.

One of the activity that engaged the students at their first year of junior secondary school was the following (Radford, 2010):

Observe this sequence of dots

●	●●	●●●
●●	●●●	●●●●
Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3

1.What is the 4th figure? Draw it.

2.And the 5th? Draw it and write how many dots is composed.

3.The 10th figure of how many dots is composed?

4.And the 100th figure? Explain with words how did you do to find it.

5.Now use n for indicating a generic figure and write a formula to have the number of dots that composed figure n.

Solving this task, first the students used what Radford (2010) calls arithmetic generalisation, in that they have recognised the iterative specific feature of the sequence. At a second step, they used an algebraic generalisation, and wrote a formula for having the total number of dots in function of the generic number of the figure (n). This task, in fact, is constructed on the same conceptual nodes of the previous example, namely the recursive rule and the close formula for determining the generic element of the sequence (that is an arithmetic progression). Not all the groups arrived to determine such a formula, some groups obtained one expression for it (2n+1, in Figure 7) and other groups another expression (n+n+1), one group obtained both the expressions, recognising they were equal (in Figure 8 the solution of this group).

Figure 7: The solution of a group.

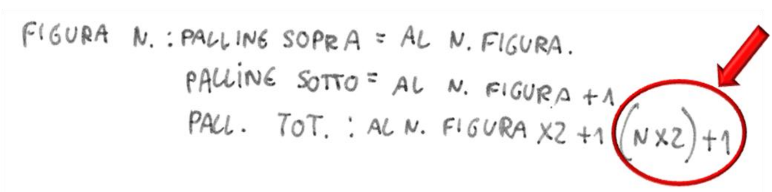
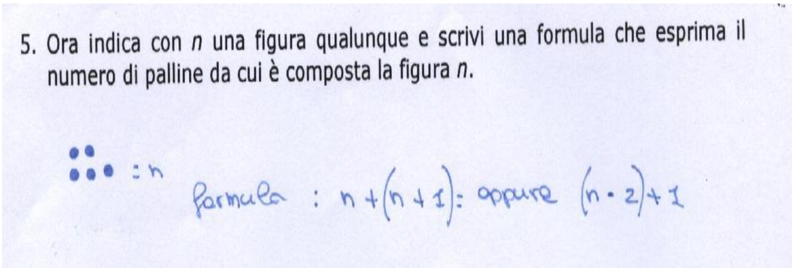


Figure 8: The solution of another group.



On the platform students had to discuss the tasks solved in class, or to solve new tasks and to discuss about them in a forum, or to post a homework with a deadline, and also to invent sequences to be solved by their classmates. This engagement in the platform with a work at distance was very fruitful, because the students, fascinated by the technology and by the possibility of connection and of discussion with their mates, participated in a very active way. Moodle functions in this way as a representational and communication infrastructure, rich of various possibilities of interactions for the community of young learners. And not only the teachers involved in the project with their classes, but also the parents agreed with its use.

In the following some excerpts from a forum of discussion about the sequence:

1, 4, 7, 10, 13, …

Ca (intervention of 23rd October, 2008, 12:57)

place 6 = 16

place 7 = 19

going ahead of three to three as in the example:

place 10 = 28

place 100 = 280

place 10000 = 28000

28 X 10000

Al (intervention of 27st October, 2008, 19:33)

In my opinion at place 100 there is 298 (Figure 9)

Teacher (intervention of 29th October, 2008, 18:39)

Try to explain to Ca why at the place 100 there is 298: what mistake did he do?

Al (intervention of 4th November, 2008, 7:13)

> In my opinion Ca did a mistake because he made this reasoning: if at the place 10 there is the number 28, at the place 100 (that has one 0 more than 10) there will be 280 (that has one 0 more than 28). But no; the formula was 3 X n – 2.

Figure 9: Intervention in the forum

In this a-synchronous use of the platform for interacting, students can follow their time more than in the class, and also at distance the teacher can coordinate and guide the discussion, focusing the attention on some points, or directing students' interventions. Here, one student failed in the generalisation of the sequence, because he acted without finding a formula for the expression of the generic element. So, he wrote in the forum a wrong result for expressing such generalisation. And another student wrote that his mate was wrong, without explaining why. The teacher, intervening in the forum, suggested to this student to explain why his mate was wrong. And he did it, both explaining the wrong reasoning of his mate and justifying a correct answer. The multimodal expressivity is represented, in this case, by the inscriptions in the platform, made of words, numbers and algebraic symbols:

- The words and the numbers written by the first student, Ca, who repeated the word "place" and the number of the place and of the element of that place, separated by a symbol of = (not correct in this case, of course);
- The correct answer written by the second student (Al), without an explanation;
- The key word "why" introduced by the teacher, for recalling the meaning of mathematical reasoning, already shared in classroom;
- The narrative of the reasoning of Ca, made by Al, and the final correct answer, given in algebraic symbols as a formula for finding the general element of the sequence in function of the place occupied.

Note that the correct number introduced by the second student is not sufficient, per se, to give an explanation of the mistake made by the first student: so the teacher suggested him to explain why. And the sharing of a meaning for the word why is the key to continue in the discussion, because students know that a mathematical result should be justified with such and explanation.

This discussion took place in some days, as notified in the platform and reported in the excerpts, but was rich of meanings and gave both the students time to reason and to understand their construction of meaning. Moreover, it could be followed by the other students of the class, who read it and then discussed together at school, when the teacher compared the different solution presented by the students.

CONCLUDING REMARKS

To be a community of learning using technologies today give opportunities richer than working only in a traditional environment such as paper and pencil: representational and communication infrastructures in fact enlarge the possibility of interaction among the participants to the community, and also their productions. The products of this interaction can be seen as students' signs used for constructing meanings of mathematical objects: words, gestures, inscriptions, and so on. These signs are strongly mediated by the tool and by the teacher, becoming richer with respect to their multimodal features: the non-verbal productions increase (e.g. there is a high production of gestures, which were rare in the other example), and communication features deeply mark the dynamics of these episodes. Especially the affordances of communication infrastructure amplify the power of interaction and production. And we should not imagine that at distance the richness is less, because students substitute signs they use face-to-face (such as face expressions, gazes, or gestures) with different colours of the characters, various size of them, or introduce figures and emoticons to render actually multimodal their expressivity.

In this respect, the role of the teacher changes and must be analysed according to a wider approach, in order to take into account not only his relation with students, but also the use of various technologies in the classroom (Trouche, 2004).

REFERENCES

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The Genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *International Journal for Computers in Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274.

Arzarello, F. & Robutti, O. (2010). Multimodality in multi-representational environments. ZDM – *The International Journal on Mathematics Education, 42*(7), 715-731.

Arzarello, F., & Edwards, L. (2005). Gesture and the construction of mathematical meaning. *PME XXIX*. Melbourne, *1*, 122-145.

Bartolini Bussi, M. G. & Borba, M. C. (2010). The role of resources and technology in mathematics education ZDM: *The International Journal on Mathematics Education*, *42*, 1-4.

Bielaczyc K. & Collins, A. (1999). Learning communities in classrooms: A Reconceptualization of educational practice. In: C.M. Reigeluth (Ed.)

Instructional design theories and models, A New paradigm of instructional theory. Lawrence Erlbaum Associates, London, *II*, 269–292.

Bolter, J.D. Grusin, R. (2000). *Remediation. Understanding new media*. Cambridge: MIT Press.

Borba, M.C., & Villarreal, M.E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New Yorque: Springer.

Bos-Ciussi, M, Augier, M. & Rosner, G. (2008). Learning Communities Are Not Mushrooms - or - How to Cultivate Learning Communities in Higher Education. In: C. Kimble, P. Hildreth and I. Bourdon (Eds.), *Communities of Practice: Creating Learning Environments for Educators, Information Age*, 287-308. Publishing.

Chapman, O., & Robutti, O. (2008). Current problems and challenges in upper secondary mathematics education. In: M. Niss (Ed.), *Proceedings of ICME10, Copenhagen, July 4-11 2004*. IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, Denmark, 514-518.

Gallese V., & Lakoff, G. (2005). The Brain's Concepts: The Role of the Sensory-Motor System in Reason and Language. *Cognitive Neuropsychology, 22*, 455-479.

Hegedus, S.J., & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. ZDM: *The International Journal on Mathematics Education*. *41* (4), 399-412.

Kaput, J., Noss, R., & Hoyles, C. (2002). Developing New Notations for a Learnable Mathematics in the Computational Era. In: L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 51-75, Lawrence Erlbaum.

Lakoff, G. & Núñez, R.: *Where Mathematics Comes From*. New York: Basic Books.

Lave, J., & Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge University Press.

Loncke, F. T., Campbell, J., England, A.M., & Haley, T. (2006). Multimodality: a basis for augmentative and alternative communication-psycholinguistic, cognitive, and clinical/educational aspects, *Disability & Rehabilitation*, *28*, 3, 169-174.

Mariotti M. A. (2002) Influence of technologies advances on students' math learning, in English, L. (Eds). *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 695-723, Lawrence Erbaum.

Nemirovsky, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. In: N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceeding of PME 27*, 1, 103–135, Honolulu, Hawaii.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Cheung Chan, Y., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A. & Meager, M. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: C. Hoyles, & J-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*, 89-132, New York: Springer

Beatty, R., & Geiger, V. (2010). Technology, communication and collaboration: Re-thinking communities of inquiry, learning and practice. In C. Hoyles, & J-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology – Rethinking the terrain* (pp. 251-284). New York: Springer.

Beatty, R. & Geiger, V. (2010). Technology, communication and collaboration: re-thinking communities of inquiry, learning and practice. In: C. Hoyles, & J-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*, New ICMI Study Series, New York: Springer, *13*, 251-284.

Radford, L. (2010). Layers of Generality and Types of Generalization in Patterns Activities, PNA, *4(*2), 37-62.

Rasmussen, C. Zandieh, M. & Wawro, M. (2009). How do you know which way the arrows go? The Emergence and Brokering of a Classroom Mathematics Practice. In: W. M. Roth (Ed.), *Mathematical Representation at the Interface of Body and Culture*. North Carolina: IAP, 171-218.

Robutti, O. (2010). Graphic calculators and connectivity software to be a community of mathematics practitioners, ZDM: *The International Journal on Mathematics Education*, *42*, 77–89.

Roth, W-M. & Lee, Y-J. (2006). Contradictions in theorising and implementing communities in education. *Educational Research Review*, *1*(1), 27-40.

Simone, R. (2000). *La terza fase*. Bari: Laterza.

Straesser, R. (2009). Instruments for learning and teaching mathematics. An attempt to theorise about the role of textbooks, computers and other artefacts to teach and learn mathematics. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, H. Sakonidis (Eds.) *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 67-81, Thessaloniki, Greece: PME.

Tall, D. (1989). Concept Images, Generic Organizers, Computers & Curriculum Change. *For the Learning of Mathematics*, *9* (3), 37-42.

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*, 281-307.

Verillion, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10* (1), 77-101.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice,* New York, Cambridge University Press.

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition, *Psychonomic Bulletin & Review*, *9*(4), 625-636.

Outros Artigos

Trabalho colaborativo e matemática: contributo para a comunicação e aprendizagem matemática

Margarida César
Universidade de Lisboa, Instituto de Educação
Ricardo Machado
Universidade Nova de Lisboa, FCT, UIED

RESUMO

A matemática é uma disciplina com um papel decisivo no prosseguimento de estudos e que é, muitas vezes, responsável por alguns dos abandonos escolares precoces. Está frequentemente associada a elevadas taxas de insucesso académico e à construção de representações sociais negativas. O trabalho colaborativo, nomeadamente em díade, pode actuar como ferramenta mediadora no acesso ao sucesso académico. Assumindo uma abordagem interpretativa, de inspiração etnográfica, esta investigação insere-se no projecto *Interacção e Conhecimento*, situando-se no nível de investigação-acção. Um dos objectivos desta investigação é perceber os contributos do trabalho colaborativo no acesso ao sucesso académico dos alunos na disciplina de matemática. Os participantes são os alunos duma turma de 8.º ano de escolaridade, o professor/investigador e outros dois observadores. Os instrumentos de recolha de dados são um instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas), tarefas de inspiração projectiva, questionários, observação, recolha documental e protocolos dos alunos. Os dados foram tratados através de uma análise de conteúdo narrativa, sucessiva e aprofundada, de onde emergiram categorias indutivas. A análise do trabalho realizado por uma díade – Carolina/Paula – ilumina as potencialidades que o trabalho colaborativo tem na apropriação de conhecimentos (matemáticos) e no desenvolvimento de capacidades e competências (matemáticas).

A disciplina de matemática está frequentemente associada a representações sociais negativas, que configuram os desempenhos dos alunos (Abrantes, 1994; Machado, 2008), sendo importante facilitar-lhes o acesso às aprendizagens matemáticas, à literacia e ao sucesso académico, permitindo que construam representações sociais da matemática mais positivas e evitando formas de exclusão escolar e social (César, 2009; Cobb e Hodge, 2007). As práticas de sala de aula desempenham um papel fundamental e as escolhas que os professores fazem quanto aos processos interactivos em jogo, contrato didáctico, natureza das tarefas e formas de avaliação constituem-se como elementos essenciais em relação ao acesso ao sucesso escolar, bem como à apropriação de conhecimentos e mobilização/desenvolvimento de capacidades e competências, nomeadamente matemáticas (César, 2003; César e Oliveira, 2005; Oliveira, 2006). São estas escolhas, ou seja, esta forma de pôr em prática o currículo, vivenciando-o, que o podem tornar um veículo para a inclusão, ou um contributo para a exclusão, como afirma Rose (2002).

Os documentos de política educativa afirmam que as experiências de aprendizagem, em cenários de educação formal, deverão ser diversificadas e, assumindo uma perspectiva dialógica (Bakhtin, 1929/1981), com sentido, ou seja, internalizadas e apropriadas pelo próprio participante nas actividades matemáticas, algo que nos documentos de política educativa aparece frequentemente designado como aprendizagens com significado (Abrantes, Serrazina, e Oliveira, 1999; NCTM, 2007; Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa et al., 2007). Se o aluno aprender matemática atribuindo sentidos aos conhecimentos apropriados, mais facilmente conseguirá realizar transições (Zittoun, 2006) entre estes e os problemas com que se confronta nas culturas exteriores à escola, ou em outros cenários ou situações de aprendizagem formal, como um exame. Aprendizagens diversificadas e com sentido favorecem o acesso à literacia e numeracia, desenvolvendo o sentido crítico e permitindo exercer uma cidadania participativa (Apple, 1995). Estes documentos realçam ainda a necessidade de saber trabalhar colaborativamente como algo essencial numa sociedade na qual o trabalho em equipe desempenha um papel cada vez mais relevante para o progresso do conhecimento (Abrantes et al., 1999; DEB, 2001; NCTM, 2007).

A implementação de práticas colaborativas em cenários de educação formal favorece a apropriação de conhecimentos, bem como a mobilização/desenvolvimento de capacidades e competências, matemáticas e transversais, como a argumentação sustentada, o sentido crítico, a autonomia ou a responsabilização (Abrantes, 1994; César, 2003, 2009; Machado, 2008). O trabalho colaborativo pode assumir diversos formatos, como o trabalho de projecto, em pequenos grupos (Abrantes, 1994), ou o trabalho em díade, em actividades de investigação ou na resolução de problemas e exercícios (César, 2009). A existência de espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004), nos quais os alunos se sentem à vontade para se expressarem e reflectirem sobre as aprendizagens, desenvolvendo capacidades complexas, como o pensamento ou a língua (Vygotsky, 1934/1962), facilitam o trabalho colaborativo. Para promover o trabalho colaborativo é necessário estabelecer um contrato didáctico coerente e sustentado num quadro de referência teórico sólido, desenvolvendo a consciência epistemológica dos professores (César, 2008). Este contrato didáctico deve promover a autonomia, a responsabilização, facilitando a comunicação do tipo horizontal (aluno/aluno) (César, 2003, 2009; Machado, 2008).

O professor deverá gerir o currículo tornando-o adequado às características, interesses e necessidades dos alunos, na medida em que “(...) o modo como se pensa que os alunos aprendem Matemática é decisivo em todo o processo de criação e concretização do currículo” (Ponte, Matos, e Abrantes, 1998, p. 322). Desse processo de concretização do currículo faz parte a natureza das tarefas propostas aos alunos, a forma como se organiza o trabalho, em aula, bem como o próprio processo de avaliação. O professor deverá seleccionar, adaptar e/ou elaborar tarefas que promovam as capacidades e competências matemáticas dos alunos, bem como a sua participação. Para o trabalho colaborativo, as tarefas devem possibilitar uma diversidade de estratégias de resolução, de tipos de abordagem (global ou passo-a-passo) e de raciocínio matemático (por exemplo, analítico, geométrico). Além disso, devem ser desafiantes, estimulando o interesse e a persistência dos alunos (César, 2003, 2009; Machado, 2008). Ao emergirem várias estratégias de resolução, que os alunos deverão conseguir explicitar, a comunicação torna-se fundamental para a partilha de sentidos (Bishop e Goffree, 1986).

METODOLOGIA

Esta investigação faz parte do projecto *Interacção e Conhecimento* (IC), cujo principal objectivo era estudar e promover o trabalho colaborativo, nomeadamente em díade, em cenários de educação formal. O projecto IC teve a duração de 12 anos (1994/95 a 2005/06) e abrangeu três níveis quanto ao *design* da investigação: (1) *quasi-experimental*; (2) investigação-acção; e (3) estudos de caso. Este estudo situa-se no Nível 2 do projecto, ou seja, realizámos uma investigação-acção (Mason, 2002), assumindo uma abordagem interpretativa, de inspiração etnográfica (César, 2009; Hamido e César, 2009).

Esta investigação decorreu durante um ano lectivo e foi desenvolvida numa turma de 8.º ano de escolaridade (N = 21), do ensino regular diurno, numa escola situada perto de Lisboa, numa zona de fracos recursos económicos, havendo diversos alunos que recorriam ao SASE e/ou tinham encarregados de educação desempregados. Muitos dos alunos desta turma já tinham vivenciado situações de insucesso escolar e alguns deles estavam em risco de abandono escolar precoce. Consideramos também como participantes o professor/investigador e dois observadores (orientador de estágio e colega do núcleo de estágio). Os nomes utilizados são fictícios, para protegermos o anonimato dos participantes. Os dados foram recolhidos através de um instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), respondido na primeira semana de aulas do 1.º período, questionários (Q), realizados no início (Q1) e final (Q2) do ano lectivo, tarefas de inspiração projectiva (TIP), realizadas no início do 1.º (TIP 1) e 2.º períodos (TIP 2) e no final do 3.º período (TIP 3), da observação (participante observador, segundo Merriam, 1988), registada em diário de bordo (DB) e de protocolos de alunos (PA), sendo estes dois últimos instrumentos recolhidos ao longo de todo o ano lectivo. O tratamento e análise dos dados baseou-se numa análise narrativa dos dados (Clandinin e Connelly, 1998), começando por uma leitura flutuante, seguida de leituras sucessivas e mais aprofundadas, das quais emergiram as categorias indutivas de análise (César, 2009; Hamido e César, 2009).

RESULTADOS

Quando se implementa o trabalho colaborativo, nomeadamente em díade, assumindo os princípios epistemológicos e pedagógicos do projecto IC, a 1.ª semana de aulas é fulcral, especialmente em turmas sem continuidade pedagógica. Nessa semana, o professor não lecciona conteúdos. Preocupa-se em conhecer as características, interesses e necessidades dos alunos, para poder adaptar, de forma adequada, as práticas àquela turma. Procura, ainda, criar um ambiente de sala de aula, nomeadamente através das mensagens implícitas, que favoreça o desenvolvimento futuro de trabalho colaborativo. Para isso, aplica um conjunto de tarefas – uma tarefa de inspiração projectiva (TIP 1), um questionário (Q1) e um instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas) (IACC) - de modo a ter acesso a um conhecimento mais aprofundado e sustentado dos alunos. A TIP 1 visava conhecer a representação social dos alunos sobre a matemática, pedindo-lhes: *Desenha ou escreve o que é para ti a matemática*. O Q1 pretendia conhecer alguns dados pessoais dos alunos, informações relativas aos percursos académicos e tempos livres. O IACC é constituído por 5 tarefas que avaliam se os alunos conseguem, ou não, mobilizar determinadas capacidades e competências, tais como, sentido crítico, intuição matemática, persistência na tarefa, criatividade, se têm acesso ao raciocínio concreto ou abstracto, se têm preferência por raciocínios analíticos ou geométricos e o tipo de abordagem que os alunos utilizam na resolução de um problema (abordagem global ou passo-a-passo). As informações recolhidas na 1.ª semana são essenciais para a formação das primeiras díades e planificação das aulas.

A constituição das primeiras díades é responsabilidade do professor, excepto quando as turmas têm continuidade pedagógica. Nesse caso, são propostas pelos alunos. As díades são heterogéneas quanto ao género, capacidades e competências já desenvolvidas, interesses, formas de actuação em aula, aproveitamento em matemática e/ou projectos de vida. Pretende-se que, numa determinada díade, os alunos consigam mobilizar capacidades e competências complementares. Assim, quando confrontados com tarefas adequadas, conseguem exercer, alternadamente, o papel de par mais competente (César, 2009). Posteriormente, as alternâncias das díades permitem aos alunos desenvolverem, com outros pares, outras capacidades e competências, evitando também problemas derivados da dependência, que se poderia criar, caso as díades se mantivessem inalteradas todo o ano lectivo.

Analisamos o percurso de duas alunas – Carolina e Paula – escolhidas enquanto exemplo paradigmático. Esse percurso irá ser ilustrado através das informações recolhidas nas tarefas da 1ª semana (início do ano lectivo) e de exemplos de tarefas matemáticas que as alunas resolveram, em díade, durante o ano lectivo.

Caracterização de Carolina

A Carolina era uma aluna com 13 anos, empenhada, trabalhadora e que gostava de ajudar os colegas. Quanto aos desempenhos matemáticos em anos lectivos anteriores, afirma que é uma aluna média “porque nunca tive negativa a matemática” (Carolina, Q1, Setembro 2006). Quando questionada sobre se gostava de matemática, revela que gosta "Mais ou menos, porque acho alguma matéria difícil, e a turma e os professores não ajudam muito" (Carolina, Q1, Setembro 2006), iluminando algum descontentamento em relação à matemática e, também, em relação à própria turma e aos professores, que ela considera não facilitarem o acesso a melhores desempenhos matemáticos que, implicitamente, gostaria de atingir.

As respostas obtidas no IACC evidenciaram que não tinha conseguido mobilizar nenhuma das capacidades e competências em análise, pelo que se tratava de um caso a que deveríamos dar particular atenção, nas primeiras semanas de aulas, para tentarmos perceber se este desempenho era fruto de algum nervosismo, de um bloqueio momentâneo, ou se se tratava de uma aluna com dificuldades de aprendizagem que devessem ser tidas em consideração.

Na TIP 1, esta aluna respondeu:

> Para mim a matemática é uma disciplina muito importante, hoje em dia, para conseguirmos tirar um curso. Porque em quase todos os empregos é necessário aprender e saber matemática". (Carolina, TIP 1, 19, Setembro 2006)

A resposta a esta tarefa é sustentada por uma argumentação muito frequente – importância da matemática no futuro – muitas vezes transmitida pelos *media*, família, professores e pela sociedade, em geral (Machado, 2008; Piscarreta, 2002; Ramos, 2003). De salientar a distinção que estabelece entre o *aprender e o saber* matemática, uma vez que está subjacente que se pode aprender, no sentido de ter estudado, na escola, mas não saber, ou seja, não ser capaz de mobilizar esses conhecimentos noutro tipo de situações. Este é um aspecto que revela já uma análise mais aprofundada e que é mais raro encontrar-se. Por isso, bem como pelas respostas ao questionário, a Carolina não parecia ser uma aluna com grandes dificuldades de aprendizagem, apesar dos desempenhos no IACC, o que realça a importância de se recorrer a diversos tipos de instrumentos, triangulando-os.

Caracterização de Paula

No início do ano lectivo, a Paula tinha 14 anos e era bastante sociável. Encontrava-se a repetir o 8.º ano de escolaridade pela segunda vez, tendo obtido Nível 2 a matemática, afirmando não gostar "porque é a disciplina que tenho mais dificuldades e que axo menos interessante" (Q1, Setembro 2006, grafia da aluna), posição que, provavelmente, foi configurada pelo percurso académico e vivências pouco positivas associadas a esta disciplina.

Através das respostas obtidas no IACC pode-se evidenciar que a aluna tinha acesso ao raciocínio abstracto e tinha preferência por uma abordagem analítica dos problemas.

Na primeira TIP 1, a Paula escreveu:

> Para mim a matemática é uma disciplina que é prexixo muita atenção e um stor que saiba explicar bem e que não torne a matemática mais secante do que já é; e também é um conjunto e temas que englobam números.” (Paula, TIP 1, 19, Setembro 2006)

Analisando esta resposta, é nítida a existência de uma representação social negativa sobre a matemática, pois é uma disciplina “secante”, designação que é muito frequente encontrarmos, tal como a associação a números e contas. Assim, esta representação social não apresenta marcas de criatividade, ou de uma reflexão pessoal aprofundada. Por outro lado, realça o papel do professor como facilitador da apropriação de conhecimentos matemáticos e da forma como os alunos encararam as actividades matemáticas. Salienta, também, que esta é uma disciplina em que se tem de estar muito atento. Esta argumentação relaciona-se, possivelmente, com experiências anteriores, enquanto aluna, em que os exercícios só poderiam ser resolvidos se estivessem com muita atenção ao que o professor ia explicando, ou seja, com aulas baseadas no ensino expositivo, seguido da resolução de exercícios. Para além disso, os diversos desempenhos escritos iluminavam dificuldades de expressão escrita, quer quanto à ortografia quer quanto à sintaxe, aspecto que também deveria ser tido em consideração na escolha do par com quem ia trabalhar.

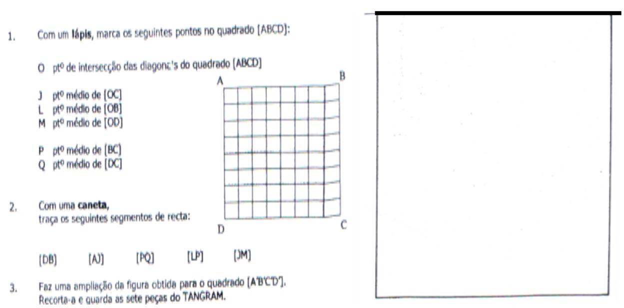
A aula de matemática e o trabalho colaborativo

Em práticas de sala de aula onde se implementa o trabalho colaborativo, nomeadamente em díade, existem três momentos de trabalho. Um primeiro momento, trabalho em díade, durante o qual cada díade resolve as tarefas propostas pelo professor. Quanto à natureza das tarefas, estas podem ser de investigação/exploração, problemas, exercícios, mas todas elas pretendem fomentar o envolvimento dos alunos nas actividades matemáticas e o desenvolvimento das capacidades e competências descritas nos documentos de política educativa (DEB, 2001; Ponte et al., 2007). Um segundo momento, discussão geral, é realizado em grande grupo (turma), no qual se exploram diversas estratégias de resolução de uma mesma tarefa, bem como argumentos diferentes que as sustentam. Um terceiro momento é caracterizado pela sistematização dos conteúdos abordados naquela aula. Inicialmente, essa sistematização é da responsabilidade do professor. Este realiza-a com a colaboração dos alunos, tentando que sejam eles a ter um papel cada vez mais relevante. Assim, à medida que os alunos vão interiorizando as regras do contrato didáctico, vão sendo eles a realizá-la, assumindo o professor o papel de mediador, questionando aspectos que podem levar a um maior rigor ou profundidade das sínteses produzidas. Esta progressiva participação e responsabilização dos alunos é um aspecto essencial da autonomia que se pretende desenvolver, bem como da preparação para que sejam capazes de aprender a aprender. Numa sociedade de mudanças tecnológicas aceleradas, em que os conhecimentos evoluem também de forma cada vez mais acentuada, ser capaz de aprender, de forma autónoma, permite adaptar-se às características necessárias para, no futuro, evitarem formas de exclusão social e profissional. Em todos os momentos a comunicação e as interacções sociais, nomeadamente entre pares, assumem um papel fundamental.

Atendendo às informações recolhidas na 1.ª semana de aulas, a Carolina e a Paula formaram uma díade. Sabíamos que, quanto ao aproveitamento em matemática, nos anos lectivos anteriores, a Carolina tinha obtido melhores resultados e construíra uma representação social mais positiva da matemática. Porém, a Paula tinha acesso ao raciocínio abstracto, o que lhe poderia permitir actuar como par mais competente (Vygotsky, 1932/1978) em algumas das actividades. Como ambas tinham diversas capacidades e competências a desenvolver, se trabalhassem na sua zona proximal de desenvolvimento, a partir das tarefas propostas pelo professor/investigador, seria possível promover o desenvolvimento real de cada uma delas (Vygotsky, 1932/1978; 1934/1962).

A primeira tarefa matemática é importante quando se implementam práticas colaborativas, pois começam-se a configurar cenários onde as interacções sociais ganham vida. Essa tarefa deverá desafiar as crenças e representações sociais dos alunos, suscitando interesse, entusiasmo e adesão ao trabalho em díade. A tarefa visava a construção de um *tangram*, para posterior construção de algumas figuras. Quando se distribuiu a tarefa e se iniciou a actividade, foi bastante notório o espanto dos alunos por ter lhes sido proposta esta tarefa. Sendo uma aula de matemática, eles pensavam que "tinham de fazer contas" (DB, 22, Setembro 2006), o que não estava a suceder. Para além disso, ninguém tinha construído um *tangram*, nem mesmo os alunos que se encontravam a repetir o 8.º ano de escolaridade, como a Paula.

Figura 1 – Enunciado da tarefa (1.ª aula de trabalho em díade, 22, Setembro 2006).



Cada díade só tinha um enunciado, pelo que o trabalho desenvolvido teria que ser gerido e negociado. A Paula tomou a liderança e realizaram com sucesso a Questão 1. A Carolina ia ajudando e confirmando o que a Paula ia efectuando. No entanto, quando iniciaram a Questão 3, a Paula bloqueou

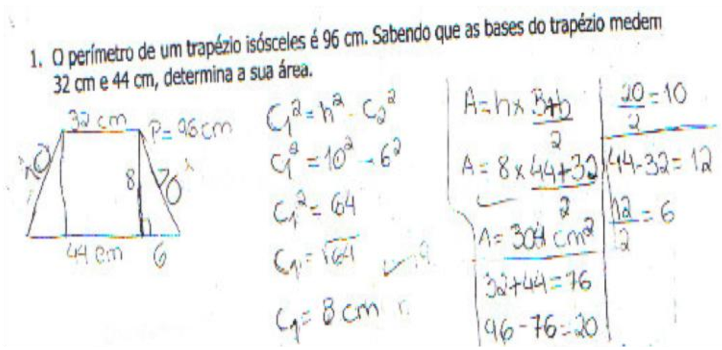
> e desistiu de realizar a tarefa, afirmando que não percebia e, portanto, não fazia. A Carolina não desistiu da tarefa e incentivou a Paula a continuar, explicando-lhe que ampliar a figura não era difícil: “Isto faz-se da mesma maneira que tu fizeste em cima. Basta medires o lado do quadrado e o assunto está resolvido!” (DB, 22, Setembro 2006). Nesta altura, a Carolina tomou a liderança da díade. A Paula mediu o lado do quadrado e a Carolina determinou o ponto médio desse lado e prosseguiram, até finalizarem a tarefa. Assim, as duas assumiram, alternadamente, o papel de par mais competente e ambas trabalharam na sua zona de desenvolvimento proximal (Vygotsky, 1932/1978).

Seguidamente, cada díade foi desafiada a construir figuras utilizando todas as peças do *tangram*, sendo facultada uma folha com várias figuras. Após algumas divergências, a Paula e a Carolina optaram por começar a construir um gato. A estratégia de resolução adoptada pela díade consistiu numa identificação, passo-a-passo, entre as peças do *tangram* e as partes da figura. Após algumas tentativas falhadas, a Paula desistiu e começou a conversar com os colegas. Nessa altura, o professor, que circulava pelas díades, aproximou-se e perguntou à Paula como é que estava a correr o trabalho. Ela afirmou que tinha desistido, porque “para variar não estou a conseguir” (DB, 22, Setembro 2006). O professor argumentou: “Curioso! Mas, recorda-me de uma coisa... também não conseguias fazer a ampliação do *tangram*, não era? E fizeste, certo?! “(DB, 22, Setembro 2006). Perante a argumentação e expressão do professor, a Paula virou-se para a Carolina e disse “É desta que vai ser! Vamos lá!” (DB, 22, Setembro 2006). Esta evidência ilumina a importância do papel do professor durante o trabalho em díade, uma vez que incentiva os alunos a (re)começarem o trabalho com o outro elemento da díade, sem mencionar a solução. Ilumina, ainda, como o tipo de comunicação estabelecido é essencial para os desempenhos matemáticos dos alunos.

O teorema de Pitágoras foi um dos conteúdos leccionados no 1.º período. Esta tarefa faz parte de um conjunto de tarefas deste tema.

Uma das regras do contrato didáctico era que todas as estratégias de resolução e procedimentos teriam que ser justificados, pois qualquer elemento da díade poderia ir ao quadro, na discussão geral, representar o trabalho daquela díade. Nesta altura do período, muitos alunos daquela turma já começavam a interiorizar essa regra, em especial a Paula. Embora não muito confiante, ia dizendo à Carolina o que tinham que fazer, embora finalizasse sempre as suas afirmações com a mesma frase: “Mas eu não sei... não percebo nada disto!” (DB, 26, Outubro 2006). Esta afirmação ilumina a carga negativa que a matemática representava para ela, devido às experiências pouco positivas vivenciadas no percurso académico anterior, e a preocupação da Paula em tentar perceber o problema, uma vez que poderia ir ao quadro na discussão geral, representar o trabalho desenvolvido pela díade.

Figura 2 – Resolução da díade Paula/Carolina (26, Outubro 2006).

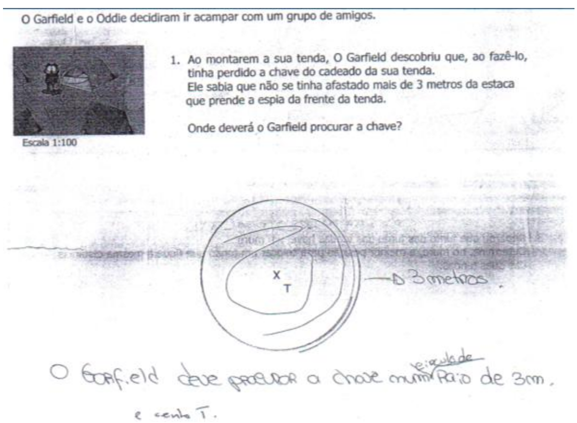


Na discussão geral, a Paula foi ao quadro resolver o problema. Começou por traduzir, por meio de um desenho, o que estava descrito no problema e resolveu-o recorrendo à estratégia de resolução que ela e Carolina tinham adoptado. No entanto, para que todos percebessem essa estratégia de resolução, o professor/investigador questionou a turma sobre alguns resultados que a díade tinha obtido, em vez de optar por questões de natureza mais geral, como “Perceberam?” ou “Alguém tem dúvidas?”, que raramente permitem ter acesso à informação pretendida. Desta forma, passo-a-passo, um aluno da turma explicava uma determinada etapa da estratégia de resolução da díade Paula/Carolina. Por exemplo, “De onde vem o número 6?”, De onde vem o número 10?”. É desta negociação de sentidos, por parte dos alunos e do professor, desta partilha de modos diversos de encarar os conceitos e procedimentos matemáticos, que se fomenta uma aprendizagem que Bishop e Goffree (1986), ou Ponte e seus colaboradores (1998), designam como tendo significado.

A Carolina e a Paula trabalharam na mesma díade até ao final do 1.º período. A partilha de experiências e as aprendizagens que ambas realizaram, em conjunto, configurou um percurso académico no qual ganharam voz (Wertsch, 1991). Foi visível, através dos registos em diário de bordo do professor/investigador, nos restantes períodos desse ano lectivo, o envolvimento progressivo de ambas nas actividades matemáticas, mesmo já estando a interagir com outros pares, bem como uma mudança nas formas de actuação, relativamente à matemática.

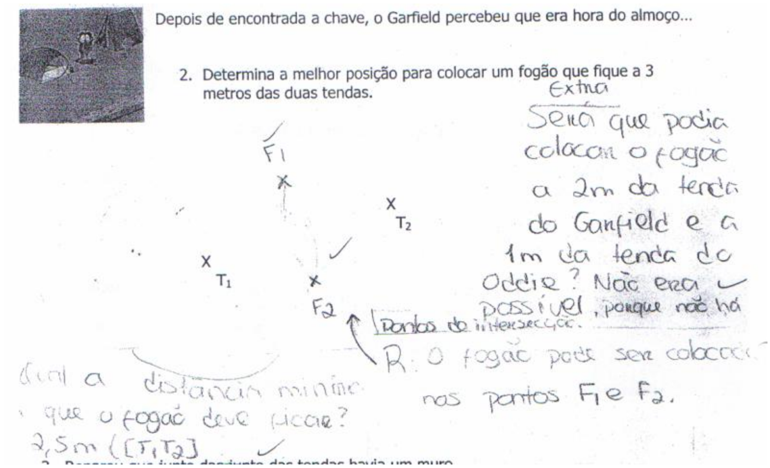
No 3.º período foi leccionado o conteúdo dos lugares geométricos. Foi construída uma história em torno de um acampamento, tendo como personagem principal, já conhecida dos alunos, o Garfield. A partir da exploração de várias situações, pretendíamos abordar os lugares geométricos previstos para o 8.º ano de escolaridade. Esta tarefa é a primeira dessa sequência, em que o Garfield tinha perdido as chaves do cadeado da tenda e perguntava-se onde é que ele poderia procurar as chaves, sabendo que ele não se tinha afastado mais de 3 metros da estaca em frente da tenda. Nesta altura, a Carolina e a Paula trabalhavam com outros pares, Vítor e Pedro, respectivamente. As estratégias de resolução adoptadas em cada díade foram diferentes. Na díade Carolina/Vítor, eles mediram 3cm para a esquerda, direita, cima e baixo do ponto T, limitando-se a concluir que só poderiam ser naquelas quatros pontos que estava as chaves. Na díade Paula/Pedro optaram por desenhar uma circunferência de raio 3 cm e centro no ponto T, afirmando que a chave deveria estar na "linha".

Figura 3 – Resolução da díade Paula/Pedro (15, Maio 2007).



No entanto, em ambas as situações, as díades não tiveram em consideração uma parte do enunciado importante "(...) não se tinha afastado mais de 3 metros da estaca (...)". Essa situação foi observada em muitas outras díades, possibilitando a oportunidade de explorar (mais) a comunicação matemática, na discussão geral. Essa negociação e partilha de sentidos (matemáticos), deu acesso a uma melhoria dos desempenhos das díades, em particular na díade Carolina/Vítor, na questão seguinte, em que pretendia-se colocar um fogão que ficasse a 3 metros de duas tendas. Após a leitura do problema, desenharam duas circunferências de raio 3 cm e centro em T_1 e T_2 e concluíram que a melhor posição seria os dois pontos de intersecção das duas circunferências. Na discussão geral, o professor/investigador pretendia, também, explorar ainda (mais) aquela situação, questionado a turma acerca de outras situações que podiam emergir desse contexto. Por exemplo, será que se podia colocar o fogão a 2 m da tenda do Garfield e a 1 m da tenda do Oddie? Qual a distância mínima a que o fogão deve ficar?. Segundo Ponte (2005) e Ponte e Serrazina (2000), os momentos de discussão são oportunidades únicas para a negociação de sentidos (Bakhtin, 1929/1981) e significados matemáticos. Acrescentaríamos, ainda, que se configuram como espaços/tempos (César, 2003) nos quais os alunos partilham e discutem sentidos atribuídos aos conhecimentos, estratégias de resolução e actividades (matemáticas), alargando e tornando mais sustentadas as aprendizagens realizadas.

Figura 4 – Resolução da díade Carolina/Vitor (15, Maio 2007).



Os desempenhos matemáticos da Carolina foram melhorando, obtendo Nível 3, 4 e 5 nos 1.º, 2.º e 3.º períodos, respectivamente, ou seja, obteve níveis de desempenhos matemáticos que nunca antes tinha atingido, pois sempre fora uma aluna de Nível 3. Esta aluna salientou a importância que o trabalho colaborativo teve nos desempenhos matemáticos, afirmando que gostou de trabalhar em díade, porque "assim temos métodos de trabalho diferente e conseguimos trabalhar com várias pessoas" (Carolina, Q2, Junho 2007). No início, esta aluna só gostava de trabalhar com as pessoas que pertenciam ao seu círculo de amigos, pois pensava só com elas podia aprender (DB, 23, Outubro 2006). Porém, ao trabalhar colaborativamente com outras pessoas com as quais habitualmente não comunicava, como a Paula, apercebeu-se de que também podia aprender com elas, alargando a socialização. Esta evidência ilumina a importância das interacções sociais e do estabelecimento de um contrato didáctico coerente na mudança, em termos sociais e académicos, da Carolina.

Estando a repetir pela 2.ª vez o 8.ª ano de escolaridade, a Paula evidenciava alguma resistência na adesão às tarefas propostas, especialmente até meio do 1.º período. Para ela, era inconcebível estar a conseguir resolver algumas das tarefas, especialmente estar a ajudar uma colega – a Carolina – que, ao contrário dela, tinha obtido nível positivo, anteriormente. Participava nos jogos (inter)relacionais, mas sempre questionando quando é que começava "a matemática a sério" (DB, 29, Outubro 2006), pois estava convencida que, se acertava, se conseguia responder, então aquilo não podia ser (ainda) matemática. A Paula obteve Nível 2, no 1.º período, e Nível 3, nos restantes períodos. Reconhece a importância do trabalho colaborativo, afirmando que gostou de trabalhar em díade, uma vez que "assim podemos ajudar e sermos ajudado pelos nossos colegas" (Paula, Q2, Junho 2007).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É importante a promoção de ambientes de sala de aula que envolvam os alunos nas actividades matemáticas, nos quais tenham acesso a experiências de aprendizagem diversificadas e que os façam questionar sobre a representação social dualista da matemática que construíram, em termos de certo ou errado (Borasi, 1991). O trabalho colaborativo, nomeadamente em díade, assume-se como um facilitador na configuração desses ambientes, na medida em que os alunos são chamados a intervir no processo de ensino e aprendizagem, melhorando os desempenhos matemáticos e trabalhando de forma progressivamente mais autónoma. Permite trabalhar aspectos essenciais da comunicação (matemática), promovendo as interacções sociais, nomeadamente entre pares. Os espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004) associados a práticas de trabalho colaborativo propiciaram a apropriação de conhecimentos com sentido para os alunos e o desenvolvimento e a mobilização de capacidades e competências, cada vez mais necessárias a uma sociedade em constante mudança.

AGRADECIMENTOS

O projecto *Interacção e Conhecimento* foi parcialmente subsidiado pelo IIE, em 1996/97 e em 1997/98, medida SIQE 2 (projecto nº 7/96), e pelo CIEFCUL, desde 1996. Agradecemos a todos os participantes que tornaram este projecto possível.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: A experiência do projecto MAT789*. Lisboa: APM. [Tese de doutoramento]

Abrantes, P., Serrazina, L., e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME /DEB.

Apple, M. (1995). Taking power seriously: New directions in equity in mathematics education and beyond. In W. Secada, E. Fennema, e L. Adajian (Eds.), *New directions for equity in mathematics education* (pp. 329-348). Cambridge: Cambridge University Press.

Bishop, A. J., e Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson, e M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reídle.

Borasi, R. (1991). Learning mathematics through inquiry. Portsmouth, NH: Heinemann.

César, M. (2003). A escola inclusiva enquanto espaço-tempo de diálogo de todos e para todos. In D. Rodrigues (Ed.), *Perspectivas sobre a inclusão: Da educação à sociedade* (pp. 117-149). Porto: Porto Editora.

César, M. (2008). *Relatório sobre a disciplina de psicologia da educação. Lisboa: Universidade de L*isboa. [Documento policopiado, apresentado no âmbito do concurso para professor associado]

César, M. (2009). Listening to different voices: Collaborative work in multicultural maths classes. In M. César, e K. Kumpulainen (Eds.), *Social interactions in multicultural settings* (pp. 203-233). Rotterdam: Sense Publishers.

César, M., e Oliveira, I. (2005). The curriculum as a mediating tool for inclusive participation: A case study in a Portuguese multicultural school. *European Journal of Psychology of Education*, *XX*(1), 29-43.

Clandinin, D. J., e Connelly, F. M. (1998). Personal experience methods. In N. K. Denzin, e Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (pp. 150-178). Thousand Oaks: Sage.

Cobb, P., e Hodge, L. (2007). Culture, identity, and equity in the mathematics classroom. In N. Nasir, e P. Cobb (Eds.), *Diversity, equity, and access to mathematical ideas* (pp. 159-171). New York: Teachers College Press.

Departamento da Educação Básica (DEB) (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: DEB.

Hamido, G., e César, M. (2009). Surviving within complexity: A meta-systemic approach to research on social interactions in formal educational scenarios. In K. Kumpulainen, C. Hmelo-Silver, e M. César (Eds.), *Investigating classroom interactions: Methodologies in action* (pp. 229-262). Rotterdam: Sense Publishers.

Machado, R. (2008). *Brócolos e matemática: Representações sociais da matemática de alunos do 8.º ano de escolaridade*. Lisboa: APM. [Dissertação de mestrado]

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Rand Falmer.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (M. Melo, Trad.). Lisboa: APM.

Oliveira, I. (2006). *Uma alternativa curricular no 2º ciclo do ensino básico: Vivências e reflexões*. Lisboa: DEFCUL. [Dissertação de doutoramento, CdRom]

Perret-Clermont, A.-N. (2004). Thinking spaces of the young. In A.-N. Perret-Clermont, C. Pontecorvo, L. Resnick, T. Zittoun, e B. Burge (Eds.), Joining society: *Social interaction and learning in adolescence and youth* (pp. 3-10). Cambridge: Cambridge University Press.

Piscarreta, S. (2002). *Malmequer, bem-me-quer, muito, pouco ou nada: Representações sociais da Matemática em alunos do 9º ano de escolaridade*. Lisboa: APM. [Dissertação de mestrado]

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Matos, J., e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., e Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática para o 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães. H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., e Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Ramos, M. (2003). *Matemática: A bela ou o monstro? Contributos para uma análise das representações sociais da matemática dos alunos do 9º ano de escolaridade*. Lisboa: APM. [Tese de doutoramento]

Rose, R. (2002). The curriculum: A vehicle for inclusion or a lever for exclusion?. In C. Tilstone, L. Florian, e R. Rose (Eds.), *Promoting inclusive practice* (pp. 27-38). London/ New York: Routledge Falmer.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of mind: A sociocultural approach to mediated action*. Hemel Hempstead: Havester Wheatsheaf.

Vygotsky, L. S. (1932/1978). *Mind and society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, Trad.). Cambridge MA: Harvard University Press. [Original publicado em russo, em 1932]

Vygotsky, L. S. (1934/1962). *Thought and language* (Myshlenie I rech' Trad.). Cambridge MA: MIT Press. [Original publicado em russo, em 1934]

Zittoun, T. (2006). *Transitions: Development through symbolic resources*. Greenwich: Information Age Publishing.

A comunicação em sala de aula no desenvolvimento de uma tarefa de natureza exploratória

Filomena Leite Pinto
Agrupamento de Escolas Manuel da Maia, Lisboa, Projecto AREA
Leonor Santos
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, CIE, Projecto AREA

RESUMO

Este texto diz respeito a um estudo realizado no âmbito do Projecto AREA[1], sobre o discurso na sala de aula de modo a perceber a natureza reguladora que dele decorre. Seguindo uma metodologia de natureza interpretativa, analisámos uma aula de 6º ano de Matemática, recorrendo a registos escritos durante a observação e à transcrição da gravação áudio. Utilizámos uma grelha de análise desenvolvida por Santos e Pinto (2008) que inclui três dimensões: a dinâmica da interacção, o foco, e o significado.

Os resultados apontam para uma grande quantidade de interacções ao longo da aula, quer por parte do professor, quer dos alunos, sendo o número de interacções entre alunos muito reduzido. Quando comparamos as três fases de resolução da tarefa, podemos afirmar que existem padrões que se mantêm. Na dinâmica, as intervenções partem, ora do professor, ora de alunos, num design do tipo diálogo. O foco das interacções recai essencialmente na conceptualização e no processo, assumindo o produto um segundo plano de importância. As questões colocadas pelo professor, nas duas primeiras fases, incluem o reorientar o raciocínio e, na terceira fase, são substituídas pelo pedido de justificações. As intervenções afirmativas são, contudo, em número superior ao interrogativo. Os alunos quase não colocam questões excepto na primeira fase, respondendo o professor a esse aluno. As intervenções dos alunos situam-se quase exclusivamente no Responder. As explicações, por parte dos alunos, surgem na primeira fase, mas quase desaparecem nas seguintes.

Este estudo foi desenvolvido num quadro de mudança dos programas de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) em Portugal. A aprendizagem decorre do trabalho realizado pelo aluno e este é estruturado, em grande medida, pelas tarefas propostas pelo professor. Nas Orientações Metodológicas do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB) (DGIDC, 2007, pp. 8-9) pode ler-se "…o professor deve propor aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas, dando-lhes uma indicação clara das suas expectativas em relação ao que espera do seu trabalho, e apoiando-os na sua realização. Ouvir e praticar são actividades importantes na aprendizagem da Matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem".

As opções com que o professor se confronta na diversificação de tarefas e de experiências de aprendizagem e a escolha das que decide propor aos alunos estão intimamente ligadas com o tipo de abordagem que se propõe fazer - de cunho essencialmente directo ou transmissivo ou de carácter mais exploratório (Ponte, 2005). Em qualquer caso é preciso que essas opções, no seu conjunto, proporcionem um percurso de aprendizagem coerente que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos em causa, o domínio da linguagem matemática e das representações relevantes bem como o estabelecimento de conexões dentro da Matemática e entre esta disciplina e outros domínios. Neste processo são fundamentais os momentos de reflexão, discussão e análise crítica envolvendo os alunos, pois estes aprendem não só a partir das actividades que realizam mas, sobretudo, da reflexão que efectuam sobre essas actividades.

O papel do professor é, assim, determinante nas experiências de aprendizagem oferecidas e nos objectivos que com elas se pretendem atingir. Mas não bastam tarefas promissoras para serem garantidas as aprendizagens previstas. A forma como o professor interage com os seus alunos é uma dimensão essencial. A intencionalidade e a forma como o faz determinam se esta interacção é ou não marcada por uma natureza reguladora das aprendizagens (Santos, 2008). Deste modo, procurámos estudar as características da interacção estabelecida no contexto da sala de aula de Matemática, quando se trabalha uma tarefa de natureza exploratória. Para tal, foram definidas as seguintes questões:

Em cada etapa da aula, qual a dinâmica da interacção que predomina?

Em cada etapa da aula, qual o foco que predomina?

Em cada etapa da aula, qual o significado que predomina?

Existem padrões tipo em cada etapa da aula para estas dimensões?

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A publicação, em 2001, do Currículo Nacional do Ensino Básico introduziu modificações curriculares importantes em relação ao programa de 1991, em particular nas finalidades e objectivos de aprendizagem, valorizando a noção de competência. "A Matemática constitui um património cultural da humanidade e um modo de pensar. A sua apropriação é um direito de todos… Ser matematicamente competente envolve hoje de forma integrada, um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à Matemática" (DEB, 2001, p. 57).

Esta opção trará profundas alterações na prática lectiva dos professores e nas experiências de aprendizagem dos alunos (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). O desafio é tornar a aprendizagem mais significativa para os alunos, torná-los aptos a lidar com objectos e relações abstractas e a usar a linguagem própria da Matemática, o que permitirá elaborar uma compreensão e representação do mundo que proporciona formas de agir sobre ele de modo a resolver problemas que se deparam e prever e controlar os resultados das acções que se realizam.

O ensino desta ciência implica, portanto, escolhas e decisões da parte do professor, nomeadamente a natureza das tarefas de aprendizagem que propõe aos seus alunos, a sua articulação com os objectivos e conteúdos matemáticos, os materiais didácticos, as estratégias e as dinâmicas dentro da sala de aula. Estas escolhas têm por base o quadro de referência próprio de cada professor, nele se incluindo valores e concepções educativas, sendo decisivas para as aprendizagens matemáticas a realizar (Lampert e Cobb, 2003; NCTM, 1994; Ponte e Santos, 1998).

Segundo o NPMEB (DGIDC, 2007), o ensino deverá contribuir para uma aprendizagem matemática dos alunos que valorize a representação, a comunicação e o raciocínio em Matemática, a resolução de problemas e as conexões matemáticas, e a compreensão e disposição para usar e apreciar a Matemática em contextos diversos. Entre outros objectivos, os alunos devem ser capazes de, oralmente e por escrito, descrever a sua compreensão matemática e os procedimentos matemáticos que utilizam. Devem, igualmente, explicar o seu raciocínio, bem como interpretar e analisar a informação que lhes é transmitida por diversos meios, isto é, desenvolver a competência de discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação (DEB, 2001).

A importância da comunicação, no contexto específico da sala de aula de Matemática e nos vários níveis de ensino, tem sido amplamente reconhecida (e.g., Yackel e Cobb, 1998; Ponte e Serrazina, 2000). Sendo fundamental o papel do professor enquanto facilitador ou inibidor de processos comunicativos na sala de aula (Brendefur e Frykholm, 2000; Choppin, 2007; Menezes, 2005) e sabendo que o discurso é um elemento constitutivo da essência do processo educativo (Pinto e Santos, 2006), cabe ao professor proporcionar situações frequentes de trabalho na disciplina de Matemática em que os alunos, ao resolver tarefas matemáticas, ao analisar e reflectir sobre as suas resoluções e as resoluções dos colegas, possam desenvolver a comunicação matemática, uma das capacidades transversais a que o novo programa de Matemática para o Ensino Básico dá realce. Significa igualmente que o professor deve dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas.

A comunicação deve ter, portanto, um lugar destacado na prática lectiva do professor. Através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas. O aluno deve ser capaz de expressar as suas ideias mas também de interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas e de participar, de forma construtiva, em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos. A construção de significados e de conceitos (Pinto e Santos;

2006) evolui por aproximações sucessivas, sendo a partilha apenas possível a partir do momento em que estes se tornam públicos ou visíveis (Sierpinska, 1998) mas a negociação de significados tende a diminuir com o aumento do controlo exercido pelo professor sobre a dinâmica da aula (Bishop e Goffree, 1986). Quando a discussão decorre com toda a classe, os alunos acabam por calcular mais o que dizem ou mesmo calar-se se não tiverem a certeza da pertinência do seu comentário ou temerem a reacção do professor, (Gipps, 1999). Pelo contrário, em interacções aluno – aluno, ao falarem e ouvirem os colegas, clarificam significados e a construção pessoal do conhecimento, ao ser combinado com o dos outros, torna-se útil.

Contudo, a criação de tal ambiente de aprendizagem não acontece de forma espontânea. Requer um certo papel do professor, que nem sempre é fácil de desenvolver. Diversos estudos empíricos, que recorrem à observação de diversas aulas, evidenciam que se mantém a tendência para que as intervenções dos alunos surjam entre duas falas do professor, a chamada fala 'sanduíche', quando referem que as perguntas numa sala de aula de Matemática se enquadram numa forma de interacção conhecida por 'diálogo triádico' ou "sequência triádica" (Forman, 2003). A sequência é constituída por três momentos: Iniciação, Resposta, Avaliação/Seguimento. Este modo de interacção é comum (Black e Wiliam, 1998) e é considerado uma forma de orientar as aprendizagens, permitindo manter o controlo do discurso, enfatizando a existência de uma autoridade na sala de aula (Gipps, 1999). A sequência triádica permite envolver mais alunos apesar desta participação se limitar a respostas muito curtas e por solicitação do professor. Outras tipologias de comunicação na sala de aula podem ser encontradas, como seja a apresentada por Brendefur e Frykholm (2000) que identificam a comunicação: unidireccional, contributiva, reflexiva e instrutiva. Estes diferentes níveis de comunicação representam etapas progressivas de comunicação, sendo possível encontrarem-se desenvolvidas por um mesmo professor em diferentes momentos da sala de aula.

A forma como o professor questiona os alunos nas aulas parece, em particular, ter uma importância decisiva sobre a aprendizagem. "Questões bem colocadas podem simultaneamente elucidar sobre o pensamento dos alunos e ampliá-lo" (NCTM, 1994, p. 38), promovendo a auto-regulação das suas próprias aprendizagens. A pergunta pode tornar-se muito relevante no desempenho deste papel, conduzindo ao desenvolvimento de capacidades de comunicação e de raciocínio (Menezes, 2005). Contudo, o questionar não é só por si garante de um ambiente de aprendizagem eficaz (Gipps, 1999; Santos e Pinto, 2010). Por exemplo, perguntas fechadas, nomeadamente perguntas específicas de diagnóstico, quando repetidas, podem levar os alunos a mudar rapidamente de opinião, procurando a resposta correcta, sem serem acompanhadas de qualquer tipo mais elevado de raciocínio, mas antes através de estratégias para descobrir a resposta esperada pelo professor. Dar tempo/saber esperar pela resposta do aluno à questão formulada, envolver maior número de alunos na discussão e aprender a lidar com respostas erradas são outros aspectos essenciais que o professor deverá ter em conta quando interage com os seus alunos na sala de aula (Black e William, 2003).

Em síntese, para que o questionamento constitua um contexto potencialmente regulador deverá ser intencional por parte do professor, ser feito sem constrangimentos de tempo, fazer parte de um processo de comunicação bilateral e ser formado essencialmente por perguntas de tipo aberto (Black e Wiliam, 1998; Fernandes, 2005; Santos, 2004). Mas a concretização destas propostas exige um conhecimento profissional profundo, nomeadamente no conhecimento do conteúdo a leccionar, que permita ao professor ser capaz, num dado momento, de colocar a pergunta certa e ter à sua disposição um reportório de tarefas que ajudem o aluno a prosseguir para o passo seguinte (Moyer e Milewicz, 2002), bem como conhecimento sobre os alunos e sobre a avaliação (Sadler, 1998). Para além disso, é preciso ter presente que a interacção mais comum desenvolvida na sala de aula acontece do professor para o aluno, logo é uma comunicação claramente não igual. A desigualdade precisa ser considerada para se entender o que a torna numa comunicação eficaz (Sadler, 1998).

METODOLOGIA

Neste estudo, foi seguida uma metodologia interpretativa, utilizando o estudo de caso como design de investigação (Bogdan e Biklen, 1994). Foi escolhido um professor que lecciona Matemática numa escola pública da zona litoral do Centro do País, onde muitas famílias são emigrantes ou pescadores sazonais ausentando-se por longos períodos, nomeadamente para a pesca em alto mar seja na Terra Nova ou em África. Manuel é um professor com 13 anos de serviço e a sua formação inicial foi feita numa Escola Superior de Educação, na Área de Matemática e Ciências da Natureza, tendo leccionado sempre no 2º ciclo. É um professor muito bem aceite pelos colegas com quem tem facilidade em criar empatia, bem disposto, muito motivado e envolvido em projectos da escola. Tem uma boa relação com os alunos que o vêm saudar nos corredores ou falar-lhe de algum problema pessoal. As aulas foram leccionadas numa turma do 6º ano de escolaridade, com 22 alunos, quase na sua totalidade oriundos de classes média baixa ou mesmo carenciadas, com fracas expectativas em relação à escola.

O estudo abordado neste texto incide sobre uma destas aulas. A recolha de dados recorreu a duas entrevistas (Maio de 2007 e Maio de 2008), que permitiram caracterizar o professor em termos profissionais e ter uma visão global do seu modo de trabalhar, e à observação de três aulas, com a duração de 90min, registadas em áudio e posteriormente transcritas na sua totalidade. A aula tinha como objectivo a descoberta pelos alunos dos eixos de simetria de quadriláteros, partindo da dobragem de papéis coloridos que Manuel distribuiu. Os alunos podiam trabalhar em pares ou individualmente.

Para a análise da aula foi aplicada uma grelha de análise construída por Santos e Pinto (2008), no âmbito do Projecto AREA, ao qual se acrescentaram duas novas categorias no domínio da dinâmica e duas categorias no domínio do significado. Apresenta-se de seguida a referida grelha de análise:

Dinâmica					
Quem a produz	Professor (P)	Aluno (A)	Grupo de alunos (As)	Silêncios (Si)	Risos (Ri)
A quem se dirige	Professor (P)	Aluno (A)	Grupo de alunos (As)		

Foco	Conceptualização (C)	Processo (Pr)	Produto (Pd)	Gestão da sala de aula (G)

Significado	Questionar (Q)	Responder (R)	Explicar (E)	Comentar (Cm)	Debater (D)

O questionar compreende várias subcategorias, tais como pedir um resultado (Qres), uma justificação (Qjust), colocar uma questão que reoriente a linha de raciocínio (Qrac) e remeter a validação para outros (Qval).

O responder compreende várias subcategorias, como seja repetir (Rrep), resolver (Rsol), corrigir (Rc), validar (Rval), e justificar (Rjust).

O explicar integra uma descrição total (Et) ou parcial (Ep).

O Comentar (Cm) refere-se a comentários que não se inscrevem no processo de aprendizagem.

O Debater (D) refere-se a situações de argumentação entre alunos quando executam partes da tarefa sem a interferência do professor.

É de fazer notar que, no que respeita à dimensão “Significado”, as categorias nela contida podem ser da responsabilidade do professor ou do aluno, o mesmo acontecendo na dimensão “Foco”.

As interacções na sala de aula

Uma primeira análise das interacções decorridas ao longo de toda a aula (90min) mostra-nos a existência de um total de 642 interacções (Quadro 1), o que corresponde a uma média de 7,1 intervenções por minuto sendo a duração média de cada uma de 8,4 segundos. O professor intervém cerca de 43 minutos (48% do número total de intervenções) e os alunos 47 minutos

(50% do total de intervenções). Embora estes dados pudessem indiciar uma aula não centrada no professor, ao analisar-se o tempo utilizado pelos alunos verifica-se que, durante 38 minutos, o discurso é aluno-professor, 6 minutos correspondem a discurso aluno-turma e apenas 3 minutos correspondem a conversas aluno-aluno.

Quadro1: Dados gerais das interacções ocorridas nos 90 minutos de aula.

Intervenientes	Número de interacções		Tempo médio
	Total	Percentagem	(minutos)
Professor	310	48%	43
Alunos	332	50%	47
aluno - professor	272	42%	38
aluno - turma	40	6%	6
aluno - aluno	20	3%	3
Observador	12	2%	2
Total	642	100%	90

Confrontado com estes resultados, ao ler a entrevista transcrita e a sua reflexão escrita da aula, o professor tomou consciência da extensão do seu discurso, tendo ficado preocupado, quer com esse facto quer com a necessidade de escolher melhor as perguntas a colocar aos alunos de modo a que reflictam sobre o que pensam e como pensam. Na segunda entrevista ao professor (Maio de 2008), Manuel diz:

Estive a analisar algumas partes (*transcritas*) e estive a ver segunda vez, o que é … não foi um choque, mas foi …tomar uma posição assim: Eu para o ano e para o futuro tenho de ponderar muito bem é a linguagem, vou ter mais cuidado com o tipo de linguagem que utilizo ou a maneira como eu vou colocar a questão.

Esta reflexão sobre o seu discurso na sala de aula leva-o a afirmar "Estou muito descontente com a minha gestão da aula…eu noto que me perco um bocadinho". Desenvolve, em seguida, as razões que identifica que terá de melhorar, prevendo possíveis questões a colocar, no futuro, aos alunos de forma a permitir compreender as aprendizagens que realizaram ou não:

Passei a reflectir mais na maneira como eles têm que explicar, como é que aprenderam… Eles até podem estar no raciocínio correcto só que eu às vezes posso dizer qualquer coisa e eles retraem-se, podem não querer explicar. Eu normalmente digo "É pá nem que digam o maior disparate. Mas digam o que é que estão a pensar." O que é que vai na cabecinha, o que é que… Sai cá para fora. Vou tentar explorar mais esse aspecto. Gostava de chegar ao final de uma aula, ou na aula seguinte, e perguntar-lhes "Então, o que é que ficou?

Já não me chega que os alunos digam que a aula correu bem porque "Ah portámo-nos bem." "Não, não, a nível do que é que vocês aprenderam hoje? O que é que aprenderam com isto?"… "Então, agora percebeste?" "Percebi." "Então explica lá". E ele voltava a explicar e penso que assim ficava alguma coisa.

Para uma análise mais detalhada, foram analisados apenas 50min da aula, que inclui a introdução da tarefa, com o recapitular de conhecimentos anteriormente adquiridos e necessários para a presente tarefa, e parte do seu desenvolvimento, com momentos de discussão de partes da tarefa. Por outras palavras, interessou-nos analisar as interacções que ocorreram durante a introdução da tarefa (D1) quando os alunos fazem a primeira dobragem da folha A4 para obterem um quadrado e um rectângulo, o desenvolvimento da tarefa (D2) quando os alunos trabalham apenas com o quadrado e, por dobragens, descobrem os seus eixos de simetria e a discussão e sistematização destas aprendizagens (D3).

Neste período de tempo, há 146 intervenções do professor, 131 interacções que partem de alunos individualmente, 39 intervenções de um conjunto de alunos, 3 momentos de silêncio e 4 de riso. Existem 2 intervenções que são imperceptíveis pelo que não foram consideradas na grelha.

As interacções ocorridas na primeira fase de desenvolvimento da tarefa (D1), a fase de introdução da tarefa propriamente dita, apresentam a seguinte distribuição (Anexo 2):

O discurso do **professor** dirige-se preferencialmente à **turma** (apenas a fala 11 é dirigida a um aluno, em particular) e o foco é na conceptualização (ex. fala 1) e no processo (ex. falas 3, 5 e 7), como é ilustrado no extracto de aula que a seguir se apresenta:

> Prof.: Vocês vão primeiro recortá-la e transformá-la. Já agora, que quadrilátero é este que eu tenho aqui representado?
> As: É um rectângulo
> Prof.: É um rectângulo. E como é que eu posso transformar este rectângulo num quadrado?
> As: Dividindo ao meio.
> Prof.: Assim?
> As: Não. Dividindo ao meio.
> Prof.: Xiu. Assim?
> A: Não. Assim está ao contrário. Dividir outra vez.
> Prof.: Assim e assim.
> As: Nãããããão.
> Prof.: Então como, Alexandre?

O significado das questões colocadas pelo professor vai no sentido de reorientar a linha de raciocínio (fala 2) ou de pedir um resultado (fala 9), como se ilustra no extracto seguinte:

> A: 4 lados.

Prof.: 4 lados. Então e se eu meter assim … e depois assim, que tipo de quadrilátero é este? Olhem lá para os lados dele. Como é que são os lados?
A: Todos diferentes.
Prof.: Todos diferentes. Sim. Mais?
A: Só 2 é que são paralelos.
A: 2 são paralelos.
Prof.: Quais é que são paralelos, André?
André: O de cima e o de baixo.
P: Então e como é que se chama? Só tem um par de lados paralelos, certo? Então e como é que se chamam aqueles trapézios que só têm um par de lados… paralelos? Eu já ouvi o nome. Diz.
A: Trapézio.
Prof.. Fui eu que disse trapézio?
(risos)

Ainda do extracto anterior se pode verificar que as respostas do professor são para repetir (fala 2) ou validar (fala 4). As intervenções **aluno-professor** são dominantes e focam-se na conceptualização (falas 3 e 6) e no processo (falas 3 e 7) do extracto seguinte:

A: Parece aquilo que fizemos
Prof.: O quê? Fizeram em quê?
A: Eu não tenho tesoura.
Prof.: Não é preciso tesoura.
A: Não?
Prof.: Não.
A: Depois vinca-se…
Prof.: Vinca-se
A: A tesoura é precisa?
Prof.: Para já, só precisam depois de uma régua.
As questões dos alunos são no sentido de pedir validações (falas 1 e 5) das suas ideias:
A: Para dentro ou para fora, professor?
Prof.: É igual.
A: Tem que ficar certo com a outra.
Prof.: Tem de ficar certo com a outra, atenção!
A: Professor, assim está bom?

As respostas dos alunos são essencialmente sobre o resolver, validar, e justificar. Os alunos apresentam oito explicações parciais e o professor cinco explicações totais. Nesta fase surgem risos, silêncios e comentários.

As raras intervenções de alunos entre si mantêm-se ao longo do período observado. Nestas intervenções, os alunos debatem principalmente o processo.

Na fase D2 – Descoberta pelos alunos dos eixos de simetria do quadrado, as interacções ocorridas apresentam-se categorizadas no Anexo 3.

A leitura do Anexo 3 permite-nos afirmar que o professor ora se dirige à turma, respondendo a um aluno especificamente, ora dirige o seu discurso para toda a turma ora, ainda, para um dado aluno. Foca-se quase exclusivamente na conceptualização. As intervenções de alunos individualmente dirigem-se ao professor e aos colegas e focam-se na conceptualização e no produto. Há três momentos de intervenção de alunos entre si (ex. falas 8, 9 e 10) cujo foco é o processo e o seu significado é debater:

> A: Com uma cor qualquer?
> Prof.: Uma cor qualquer. Desde que dê para ver. Azul ou preto fica bem sobre esta cor de papel.
> A: Verde.
> André. Dos 2 lados?
> Prof.: Mas quais 2 lados, André?
> André. Então daqui e daqui.
> Prof.: Repara, está assim, não está? Então, se eu dobrei assim, qual foi o eixo de simetria? Foi esta linha.
> Rafael. Professor, é aqui.
> A: Ai eu já passei.
> Rafael. E eu fiz assim.

As questões são colocadas maioritariamente pelo professor pedindo um resultado ou reorientando a linha de raciocínio. O responder é maioritariamente feito pelos alunos a resolver havendo cinco intervenções do professor para validar soluções dos alunos. Há ainda algumas explicações parciais do professor.

Na fase D3, faz-se a discussão dos resultados obtidos e a síntese das conclusões sobre os eixos de simetria do quadrado (Anexo 4).

O discurso desloca-se para o processo mas mantém ainda várias intervenções cujo foco é a conceptualização pois houve necessidade de esclarecer um aluno que afirmava que o quadrado tinha oito eixos de simetria:

> Prof.: Eles fazem assim. Todos estão a fazer desta maneira. Mas isto vocês não estão a encontrar eixos de simetria. Assim sim. Reparem, uma linha que divide, neste caso o quadrado, em duas partes exactamente iguais. Assim, outra vez. Assim, obtêm outro. E assim, outro eixo de simetria. Eu quero é que vocês… Todos encontraram 4 eixos de simetria e não, como o André experimentou dizer, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Atenção, não é só dali até aqui (*meio do quadrado*). Um eixo de simetria vai ser uma recta. Está bem?

O questionamento do professor centra-se no pedido de justificações (fala 1) e de resultados (fala 5) e os alunos respondem resolvendo, corrigindo, justificando (fala 4) ou repetindo:

> Prof.: Estou a desenhar um quadrado no quadro. Muito bem. Reparem, se eu dobrei… Oiçam lá quem não está a fazer bem. Se eu dobrei assim, eu obtive um eixo de simetria. Foi esta linha. E não como alguns de vocês estão a fazer assim. O eixo de simetria é só assim?
> As: Não.
> Prof.: O eixo de simetria é uma recta. Neste caso, ela vai ficar assim, mas ela pode-se prolongar.
> A: A folha é que não dá.

> Prof.: A folha é que não dá mais porque vocês só têm de fazer até aqui. Está bem? Agora, fiz esta. Volto novamente a dobrar sobre a outra. E André e Catarina não é só fazer isto. O eixo é toda esta linha. Já tenho ali quantos eixos de simetria?

O professor apresenta catorze explicações parciais e três explicações completas.

Comparando as interacções analisadas nas três fases D1, D2 e D3, as tendências identificadas estão sumarizadas no Anexo 5.

CONCLUSÕES

A análise global da aula aponta para um número de interacções tão elevado que denota necessariamente um curto intervalo de tempo entre duas intervenções consecutivas. Tal facto leva-nos a inferir que, no caso particular das questões formuladas pelo professor, o tempo de espera dado ao aluno para pensar para responder parece ser ainda diminuto, dificuldade aliás evidenciada em outros estudos (Black e Wiliam, 2003).

Podemos, no entanto, encontrar estratégias de intervenção do professor facilitadoras da aprendizagem dos alunos. É, por exemplo, o caso de alguns aspectos que emergiram da análise mais fina de parte da aula. Ao ter optado por um formato da aula baseado num discurso tipo "ping-pong", foi fundamental que, nas diversas etapas observadas, o professor tenha pedido resultados, reorientado raciocínios e pedido justificações, limitando as explicações a situações parciais de correcção de erros dos alunos. Deste modo, foi possível aos alunos realinhar pensamentos, chegar a conclusões e apresentá-las à turma depois de validadas pelo professor, isto é, o papel do professor favoreceu que os alunos trabalhassem o sentido da tarefa evoluindo na sua base de orientação (Pinto e Santos, 2006).

Quando comparamos as três fases de resolução da tarefa, podemos afirmar que existem padrões que se mantêm. Na dinâmica, as intervenções partem ora do professor, ora de alunos, num design do tipo diálogo. As intervenções dos alunos estão, em geral, encaixadas entre duas intervenções do professor. Embora com variações, o foco das interacções recai essencialmente na conceptualização e no processo, assumindo o produto, isto é, as respostas obtidas um segundo plano de importância. Apenas na fase D3 o produto surge com alguma frequência, o que seria de esperar dado se estar a confrontar e discutir respostas obtidas pelos alunos. Quando há diálogo aluno-aluno, o foco é sempre no processo.

Contudo, as questões colocadas pelo professor, nas fases D1 e D2, incluem o reorientar o raciocínio e na fase D3 são substituídas pelo pedido de justificações, como por exemplo quando o professor pergunta: "É um eixo de simetria?" e à resposta negativa dos alunos ele pergunta "Porquê?", respondendo os alunos "Porque não divide a figura em partes iguais".

O pedido de resultados mantém-se nas três fases. As intervenções afirmativas são em número superior ao interrogativo. Os alunos quase não colocam questões excepto na fase D1, em intervenções individuais, respondendo o professor a esse aluno. As intervenções dos alunos situam-se quase exclusivamente no Responder. As explicações, por parte dos alunos, surgem na fase D1, mas quase desaparecem nas seguintes. Tal facto evidencia ainda uma aula muito orientada pelo professor. É a ele que cabe dinamizar a interacção - as intervenções dos alunos são sobretudo reacções a intervenções do professor; questionar, sendo esta actividade pouco remetida para os alunos e explicar, sobretudo quando se estão a trabalhar novos assuntos (fases D2 e D3).

Do exposto, poderemos dizer que o estabelecimento de uma interacção com características semelhantes à da avaliação formativa como forma de fornecer informação acerca do hiato entre o conhecimento actual do aluno e o conhecimento objectivado, usando essa informação para o diminuir, reforçando a aprendizagem e promovendo o sucesso dos alunos, nem sempre é verificada quando analisamos o tipo de intervenção deste professor e dos seus alunos (Sadler, 1998). Este estudo vem, assim, na linha de outros já anteriormente realizados, em particular, no que respeita à dificuldade do papel do professor enquanto moderador de uma comunicação potenciadora das aprendizagens dos alunos (Sfard, 2003) e da regulação dessas mesmas aprendizagens (Black e Wiliam, 2003). No entanto, o facto de o professor ter tido acesso às transcrições das aulas permitiu-lhe tomar consciência de alguns aspectos a melhorar na sua prática de comunicação na sala de aula.

NOTAS

[1] O projecto AREA (Avaliação Reguladora do Ensino e Aprendizagem) é um projecto financiado, a partir de 2006, pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (PTDC/CED/64970/2006). O seu objectivo principal é desenvolver, concretizar e avaliar práticas de avaliação reguladora. Informação adicional pode ser obtida em http://area.fc.ul.pt

REFERÊNCIAS

Abrantes, P.; Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME, DEB.

Bishop, A., e Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, e M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Black, P. e Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education, 5*(1), 7-74.

Black, P. e Wiliam, D. (2003). In praise of educational research' formative assessment. *British Educational Research Journal, 29(5)*, 624-637.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Brendefur, J. e Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*, 125-153.

Choppin, J. (2007). Teacher-Orchestrated Classroom Arguments. *Mathematics Teacher, 101*(4), 306-310.

DGIDC (Ed) (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: ME, DGIDC.

DEB (2001). Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais. Lisboa: DEB, Ministério da Educação.

Fernandes, D. (2005). Avaliação das aprendizagens: Desafios às teorias, práticas e políticas. Lisboa: Texto Editores.

Forman, E. (2003). A sociocultural approach to mathematics reform: Speaking, inscribing and doing mathematics within communities of practice. Em J. Kilpatrick, W. G. Martin, e D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 333-352). Reston, VA: NCTM.

Gipps, C. (1999). Socio-cultural aspects of assessment. *Review of Research in Education, 24*, 355-392.

Yackel, E. e Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Lampert, M., e Cobb, P. (2003). Communication and language. Em J. Kilpatrick, W. G. Martin, e D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 237- 249). Reston, VA: NCTM.

Menezes, L. (2005). Investigar para ensinar matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Moyer, P. e Milewicz, E. (2002). Learning to question: categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(4), 293-315.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM. (obra original em inglês, publicada em 1991).

Pinto, J. e Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. e Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7*(1), 3-33.

Ponte, J. P., e Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Sadler, D. R. (1998). Formative assessment: Revisiting the territory. *Assessment in Education, 5*(1), 77-83.

Santos, L. (2004). La evaluación del aprendizaje en matemáticas: Orientaciones y retos. In J. Giménez; L. Santos e J. P. Ponte (Coords.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 157-168). Barcelona: Editorial Graó.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes e C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Santos, L. e Pinto, J. (2008). *Teacher's oral feedback and learning*. Topic Study Group 36, ICME11 (acessível em http://tsg.icme11.org/document/get/688)

Santos, L. e Pinto, J. (2010). O feedback oral no quotidiano da sala de aula. *22º Colloque International de l´ADMEE – Europe* (p. 127). Braga: IEP, Universidade do Minho.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi, e A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Sfard, A. (2003). Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in light of theories of learning mathematics. Em J. Kilpatrick, W. G. Martin, e D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 353-392). Reston, VA: NCTM.

ANEXOS

Anexo 2 – Interacções na fase D1 do desenvolvimento da tarefa.

Desenvolvimento da aula - D1- Introdução da tarefa (dobragem da folha A4)																			Total
Dinâmica	Foco					Significado													
P/A/As/Ri/Si	-	C	Pr	Pd	G	Qres	Qjust	Qrac	Qval	Rrep	Rsol	Rc	Rval	Rjust	Et	Ep	Cm	D	
Professor(P)																			
p–a		4	6	1	2	3		4		1	1		3	1		2	1		29
p–a–t		3	3	3	2	1	1	1	1	1		1	2		2				21
p–t	1	14	15	6	5	6	2	7	4	7	3	8	7	1	5	3	2		96
Alunos(A)																			
a–p	1	16	12	7	2				5	5	10	3	7	5		8	2		83
a-p–t		2	2								1	2				2	1		10
a–a			1	3							2						2	1	9
as–p		4	2	1							3	1	1						12
as–t	1	1									1						1		4
Si	1		1																2
Ri	3												1				1		5
Totais	7	44	42	21	11	10	3	12	10	14	21	15	21	7	7	15	10	1	

Anexo 3 – Interacções na fase D2 do desenvolvimento da aula.

Desenvolvimento da aula - D2- Desenvolvimento da tarefa (descoberta eixos simetria no quadrado)																			Total
Dinâmica	Foco					Significado													
P/A/As/Ri/Si	-	C	Pr	Pd	G	Qres	Qjust	Qrac	Qval	Rrep	Rsol	Rc	Rval	Rjust	Et	Ep	Cm	D	
ProfessorP)																			
p-a		8	2	1	1	3	1	2		1	1		2						22
p–a–t		11	2	3		1	1	3		2		1	5		1	3			33
p–t		10	1	1	1	4		2	1	3			3	1	1	4			32
Alunos(A)																			
a–p	1	6	1	2				1		2	5	1	1			1	1		22
a-p–t		17	2	14		1				2	15	2	3	1		2	4		63
a-a			3															3	6
as–p		3								1				2					6
as-t																			0
Si																			0
Ri	2											1	1						4
Totais	3	55	11	21	2	9	2	8	1	11	21	5	15	4	2	10	5	3	

Anexo 4 – Interacções na fase D3 do desenvolvimento da aula.

Desenvolvimento da aula - D3 - Conclusão sobre os eixos simetria no quadrado																			
Dinâmica	Foco					Significado													
P/A/As/Ri/Si	-	C	Pr	Pd	G	Qres	Qjust	Qrac	Qval	Rrep	Rsol	Rc	Rval	Rjust	Et	Ep	Cm	D	Total
Professor (P)																			
p-a		2	5				2		1	1		1				4			16
p–a–t		8	2	2		4	2	1				1			3	3			26
p–t		2	7			1	3					1				7			21
Alunos (A)																			
a–p		9	12	2		1	2		2	3	3	2	3	5			2		46
a-p–t				1							1								2
a-a	1		5						1		3						2	2	14
as–p		2		1							1	1	1						6
as-t				1						1									2
Si																			0
Ri																			0
Totais	1	23	31	7	0	6	9	1	4	5	8	6	4	5	3	14	4	2	

Anexo 5 – Comparação das principais interacções nas três fases.

Dinâmica	Foco				Significado												
P/A/As/Ri/Si	-	C	Pr	Pd	G	Qres	Qjust	Qrac	Qval	Rrep	Rsol	Rc	Rval	Rjust	Et	Ep	Cm	D
Professor (P)																		
p-a		D2	D3			D2										D3		
p–a–t		D2 D3				D3		D2					D2			D2		
p-t		D1 D2	D1 D3			D1 D2	D3	D1		D1		D1	D1		D1	D2 D3		
Alunos (A)																		
a-p		D1 D3	D1 D3						D1		D1		D1	D3		D1		
a-p–t		D2		D2							D2						D2	
a–a			D2 D3								D3							D2
as–p																		
as-t																		
Si																		
Ri	D1 D2																	

Comunicar e aprender matemática: dois casos de alunos surdos no ensino regular

Inês Borges
Unidade Investigação, Educação e Desenvolvimento
Margarida César
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

RESUMO

As mudanças sociais e legislativas das últimas décadas trouxeram desafios à comunidade educativa portuguesa, como a inclusão de alunos categorizados como apresentando necessidades educativas especiais frequentando o ensino regular. Focámo-nos nas adaptações realizadas nas práticas pedagógicas para que dois alunos surdos pudessem aprender Matemática com os colegas ouvintes. Assumimos uma abordagem interpretativa e um *design* de estudo de caso intrínseco. Pretendemos estudar os facilitadores e as barreiras à comunicação e ao acesso às ferramentas culturais da matemática, por parte de alunos surdos, numa turma do ensino regular. Os participantes foram os dois estudantes surdos (12.º ano de escolaridade), a professora de Matemática, os colegas de turma e a professora de Educação Especial. Os instrumentos foram: observação, entrevistas, conversas informais, protocolos dos alunos e recolha documental. Os dados foram analisados através de uma análise de conteúdo de índole narrativa, sucessiva e sistemática, da qual emergiram categorias indutivas de análise. Nos resultados apresentamos os principais padrões de actuação que se destacaram nas aulas a que assistimos e que facilitaram a comunicação e aprendizagem da Matemática destes dois estudantes surdos, promovendo uma maior inclusão dos mesmos, tanto no processo de ensino e aprendizagem da turma, como no grupo de pares.

A diversidade cultural, que caracteriza a Escola, em Portugal, nas últimas décadas (César, 2009; César e Oliveira, 2005), trouxe desafios e responsabilidades acrescidas para os professores. Espera-se que (re)pensem o currículo, adaptando-o a todos os alunos (César, 2003; César e Oliveira, 2005; César e Santos, 2006), tendo em consideração as características, necessidades e interesses de cada um. Acompanhando estas mudanças, os documentos de política educativa, nacionais (ME, 2008) e internacionais (UNESCO, 1994), salientam a necessidade de promover uma educação inclusiva. A noção de educação inclusiva tem assumido diferentes interpretações (Ainscow e César, 2006) mas em todas elas a preocupação com a equidade no acesso ao sucesso escolar está presente, bem como em promover a participação de todos os alunos nas actividades escolares, nomeadamente em Matemática (César e Ainscow, 2006). Apesar das alterações legislativas, muitas são as barreiras com que se deparam os alunos, em particular os categorizados como apresentando necessidades educativas especiais (Rodrigues, 2003), como os surdos, que apresentam características comunicacionais muito particulares (Borges, 2009; Freire, 2006; Melro, 2003).

A urgência de adaptar e aproximar o currículo às características de cada aluno, possibilitando que todos consigam atribuir sentidos aos conhecimentos académicos, torna-se mais flagrante na disciplina de Matemática, frequentemente associada ao insucesso académico, à rejeição, a representações sociais negativas e a uma baixa auto-estima académica positiva (Abrantes, 1994; César e Kumpulainen, 2009; Oliveira, 2006; Precatado, Lopes, Baeta, Loureiro, Ferreira, Guimarães et al., 1998). Para diversos autores, a atribuição de sentidos (Bakhtin, 1929/1981) facilita a apropriação de conhecimentos (César e Kumpulainen, 2009; Renshaw, 2004), bem como as transições entre o que se aprendeu noutros contextos, cenários e situações (Zittoun, 2006), algo essencial no que se refere à literacia e numeracia. Facilitar a atribuição de sentidos passa pela adequação das práticas, incluindo a natureza das tarefas propostas, os padrões interactivos, o contrato didáctico e o sistema de avaliação (César, 2003, 2009; Oliveira, 2006).

Diversos documentos de política educativa apontam a comunicação matemática como um dos objectivos gerais a desenvolver (Abrantes, Serrazina, e Oliveira, 1999; NCTM, 2007). Formular e testar conjecturas, elaborar argumentações sustentadas, ou estabelecer conexões são aspectos relevantes na aprendizagem da Matemática (Ponte, Matos, e Abrantes, 1998). Para isso, é preciso ter acesso a suportes comunicacionais, criando intersubjectividades, que tornem as mensagens matemáticas (e não só) compreensíveis para os diversos participantes (Borges, 2009; César, 2009). Uma vez que aprender é comunicar (Sfard, 2001) e que até pensar é comunicar (Sfard, 2008), estando inerente a pensar um suporte linguístico (verbal, ou não), investigar as adaptações das práticas realizadas quando se incluem alunos surdos em turmas do ensino regular, assume especial pertinência (César e Ainscow, 2006; Cobb e Hodge, 2007), nomeadamente por se tratar de uma comunidade em que as barreiras comunicacionais, em relação aos ouvintes, são nítidas (Carvalho, 2007; Ruela, 2000; Sim-Sim, 2005). Este aspecto é particularmente sentido pelos surdos profundos ou severos, pré-linguais, estando o acesso ao sucesso escolar frequentemente comprometido (Borges, 2009; Melro, 2003). Como afirma Sim-Sim (2005), este "(...) depende substancialmente do domínio da língua de escolarização (...)" (p. 20) que, em Portugal, é, geralmente, a língua oral portuguesa. É de realçar a pouca representação que, ainda hoje, os surdos têm na Universidade de Lisboa (Almeida, 2009). É necessário que as oportunidades, apoios e adaptações sejam adequados às singularidades de cada estudante, possibilitando que todos possam "(...) aprender matemática com profundidade e compreensão e de modo significativo de forma a serem matematicamente competentes e poderem prosseguir a sua escolaridade" (Serrazina e Monteiro, 2003, p. 467).

METODOLOGIA

O problema que originou esta investigação prende-se com as barreiras à comunicação e ao acesso às ferramentas culturais da Matemática (escolar), por parte de alunos surdos, incluídos em turmas do ensino regular diurno. O trabalho que partilhamos é parte de uma investigação mais ampla, uma dissertação de mestrado (Borges, 2009), baseada em quatro questões de investigação. Focamo-nos em duas delas, relacionadas com a comunicação e os padrões interactivos: (1) Que adaptações introduz esta professora nas práticas de sala de aula com esta turma do 12.º ano de escolaridade, que inclui alunos surdos e ouvintes?; e (2) Que alterações introduzem os alunos ouvintes desta turma na forma de comunicar quando trabalham e interagem com estes dois alunos surdos? Apesar destas questões não se centrarem, directamente, nas aprendizagens matemáticas, são essenciais para que os alunos lhes tenham acesso. As respostas obtidas constituem aspectos geralmente pouco explorados na formação de professores de Matemática.

Estudámos a participação, nas aulas de Matemática A, de dois surdos profundos e severos, pré-linguais e oralistas, que frequentavam a mesma turma de 12.º ano de escolaridade: o Dário e o Artur (nomes fictícios, para proteger o anonimato, tal como os dos restantes participantes). Um apresentava a idade esperada, o outro um ano de desfasamento. Podiam considerar-se dois casos de sucesso escolar, um dos critérios definidos para a escolha dos casos (Borges, 2009). A divulgação destes casos contribui para o desenvolvimento de uma educação mais inclusiva (Allan e Slee, 2008; Armstrong, Armstrong, e Barton, 2000).

Assumimos uma abordagem interpretativa (Denzin, 2002; Denzin e Lincoln, 1998) e um *design* de estudo de caso intrínseco (Stake, 1995). Os participantes são os dois alunos surdos, os colegas de turma, a professora de Matemática (Mariana) e a professora de Educação Especial. Os instrumentos de recolha de dados foram a observação participante (gravada, em alguns momentos, em áudio e, em todos eles, registada em diário de bordo da investigadora que, pela sua extensão, foi paginado), entrevistas, conversas informais, protocolos dos alunos e recolha documental. A observação contemplou a assistência a uma aula por semana (de Novembro a Junho), num total de 17 aulas. Os conteúdos incidiram, sobretudo, no estudo das funções. Efectuámos uma análise de conteúdo de índole narrativa (Clandinin e Connelly, 1998), sucessiva e aprofundada, começando por uma leitura flutuante e procurando, em leituras posteriores, encontrar padrões de actuação dos participantes. Da análise de conteúdo emergiram categorias indutivas (César, 2009; Hamido e César, 2009), uma delas relacionada com os padrões interactivos, em aula (Borges, 2009).

RESULTADOS

A análise de alguns episódios e de diversas evidências empíricas permitiu reconhecer padrões interactivos na comunicação professor/aluno e aluno/aluno (interacções verticais e horizontais, respectivamente) com características específicas pela presença e adaptação das práticas de sala de aula aos dois estudantes surdos. Identificámos cinco padrões interactivos, presentes na comunicação, nas aulas de Matemática: (1) regulação espacial; (2) mecanismos de regulação do ritmo de trabalho; (3) esquemas de reforço; (4) co-construção tutorial; e (5) esclarecimento de dúvidas. Estes padrões interactivos desempenharam um papel relevante na promoção da inclusão destes dois estudantes surdos e, além disso, na apropriação de conhecimentos matemáticos por parte dos diversos alunos desta turma.

Regulação espacial

O local da sala em que se posiciona o professor, relativamente aos alunos, se este se encontra em contraluz e se está de frente para eles são aspectos que carecem de particular atenção quando se incluem na sala de aula estudantes surdos. Se os surdos, tal como no caso dos participantes envolvidos neste estudo, são oralistas, recorrendo à leitura labial como principal forma de comunicação com os ouvintes, a direcção do rosto e articulação das palavras de quem com eles interage devem ser tidas em conta, pois são aspectos essenciais para que a comunicação possa ocorrer. Estes cuidados foram observados frequentemente, por parte da Mariana, a professora de Matemática, nas aulas a que assistimos, tal como ilustra o excerto: "A Mariana diz o número da lição e dita o sumário. (…) Repete junto do Dário falando (…) mais pausadamente. Faz o mesmo junto do Artur" (15.ª Aula observada, 13 de Maio de 2009, p. 137).

A preocupação com a articulação das palavras é elemento essencial para que os estudantes surdos possam aceder às ferramentas culturais da Matemática, uma vez que uma dicção pouco rigorosa ou a omissão de sílabas podem impossibilitar a leitura labial e, portanto, o acesso ao que é dito. Além disso, é frequente os surdos terem acesso a um léxico vocabular mais reduzido que o dos ouvintes, o que sublinha ainda mais a necessidade de contacto visual directo e de um posicionamento adequado uma vez que, além de permitir a leitura labial, permite ao professor, pela expressões não verbais, aperceber-se se eles dominam o vocabulário e os conceitos utilizados naquele momento. Enquanto que um ouvinte, se não perceber uma palavra, pode facilmente indicá-lo ao professor, um aluno Surdo profundo ou severo oralista, se não conseguir fazer a leitura labial, perde completamente o acesso à comunicação que se pretendia estabelecer. Portanto, apesar da dificuldade acrescida que representa, para os professores, estarem de frente para os alunos surdos quando falam, este é um padrão comunicacional que não pode ser descurado. A vantagem deste procedimento, para os alunos ouvintes, é que a articulação mais pausada e nítida das palavras também permite aos restantes colegas de turma internalizarem o discurso com mais facilidade.

Os colegas ouvintes também introduziram adaptações nas formas de comunicação, o que lhes possibilitou interagirem com os estudantes surdos: "A Núria chegou um pouquinho atrasada, pede o sumário ao Dário. Ele não percebe e ela repete apenas a palavra *sumário*, virando por completo o rosto para ele e dizendo a palavra um pouco mais devagar" (15.ª Aula observada, 13 de Maio de 2009, p. 137). Nesta descrição observámos, além da rotação do rosto, a repetição do essencial da mensagem, associada ao cuidado com a velocidade e articulação das palavras.

Na comunicação entre surdos e ouvintes, a informação oral pode ser complementada por gestos e suportes visuais diversos. Além do quadro dito tradicional, em algumas das aulas a que assistimos pudemos observar o recurso a tecnologias como o *viewscreen*, o quadro interactivo e a calculadora gráfica. Numa dessas aulas, durante a utilização de um programa informático que permite visualizar a imagem de uma calculadora gráfica no quadro interactivo, fizemos o seguinte registo: "A Mariana começa a dar instruções sobre as definições da calculadora, exemplificando na projecção do quadro interactivo. Os alunos vão repetindo os procedimentos nas suas calculadoras gráficas" (11.ª Aula observada, 22 de Abril de 2009, p. 109). Assim, as instruções dadas oralmente foram complementadas com a utilização da máquina virtual apresentada. Embora este tipo de recursos possam ser pedagogicamente úteis para qualquer aluno, para os surdos revestem-se de especial importância, dado que, para eles, a visão é o órgão privilegiado de percepção e comunicação com o meio físico e relacional. Deste modo, as alterações e complementos introduzidos permitiram tornar as aulas de Matemática mais adaptadas a estes dois estudantes surdos e beneficiaram, simultaneamente, os colegas ouvintes, como se pretende que aconteça de acordo com os princípios da educação inclusiva (Borges, 2009; César, 2009; César e Ainscow, 2006; César e Santos, 2006).

Mecanismos de regulação do ritmo de trabalho

Durante as aulas observadas emergiram alguns mecanismos de regulação do ritmo de trabalho a que a professora recorria de forma continuada. Se, por um lado, estes mecanismos eram, geralmente, semelhantes quer para os estudantes surdos quer para os ouvintes, por outro, era nítido que eram usados mais frequentemente com os estudantes surdos. O seguinte excerto exemplifica o que acabámos de afirmar:

> Mariana [Dirige-se ao Artur] – Ainda não fez o [exercício] b?
> Artur – É para TPC [trabalho para casa].
> Mariana – Para TPC? Ai, vocês estão sempre a olhar para as horas! Então aponte aí. O seu TPC é o [exercício] 300, alínea b, c e d; teste 9, página 14.
> [Toca. A Mariana fala para os estudantes da turma, em geral]
> Mariana – É para acabarem o [exercício] 300 e fazer o teste 9.

> [A Mariana vai junto ao Dário e repete o TPC]
> (7.ª Aula observada, 4 de Março de 2009, p. 77)

Para além da alternância entre as instruções dadas aos dois estudantes surdos e dirigidas para à turma, podemos observar que a professora, para implementar e manter um determinado ritmo de trabalho, optava por questionar os alunos sobre a progressão, de cada um deles, nas tarefas. Assim, em vez de dizer para trabalharem ou estarem calados, a Mariana "(...) reconduzia a atenção dos alunos para a tarefa e, subtilmente, alertava-os para a necessidade de acelerarem o ritmo de trabalho, caso não estivessem em determinado ponto do trabalho (...)" (Borges, 2009, p. 65).

Outro mecanismo de regulação do ritmo de trabalho, em aula, utilizado pela professora de Matemática, prendia-se com o posicionamento da mesma na sala. Ao circular por entre as carteiras, durante a realização das tarefas individuais, a Mariana aproximava-se dos alunos e observava em que ponto do trabalho se encontravam. Este procedimento era mais frequente com os dois estudantes surdos. Através dele, a professora conseguia saber se estavam a acompanhar o ritmo dos colegas e aperceber-se, mais facilmente, se tinham alguma dificuldade, nomeadamente linguística, em relação aos enunciados das tarefas.

Por vezes, permanecia mais algum tempo junto de um determinado aluno, para garantir que este se mantinha a trabalhar, como era o caso do Artur, que se distraía com alguma facilidade. Numa das aulas observámos o seguinte episódio, que exemplifica o que acabámos de afirmar: "(…) o Artur começa a conversar para o lado direito. A Mariana passa e diz-lhe «Então?» e fica junto dele a acompanhar o trabalho, evitando que se volte a distrair" (6.ª Aula observada, 11 de Fevereiro de 2009, p. 65).

Curioso foi apercebermo-nos de que também os colegas actuavam como elementos reguladores do ritmo de trabalho. Por exemplo, a colega de carteira do Artur, por vezes, era quem reconduzia a atenção dele para o trabalho. A intersubjectividade que desenvolveram permitia, inclusivamente, fazê-lo utilizando linguagem não verbal, tal como ilumina o excerto que transcrevemos: "O Artur "está na lua" e a Melissa dá-lhe um toque no ombro e, sem dizer mais nada, ele percebe a mensagem e retoma o trabalho" (17.ª Aula observada, 3 de Junho de 2009, p. 158). Saliente-se que, pelo que observámos, o Artur não se mostrava embaraçado ou desagradado com estes pequenos reparos, o que também foi referido pela professora de Educação Especial em entrevista: "O Artur aceita perfeitamente (…) as críticas, entre aspas, de ele ser pouco atento, pouco concentrado (...)" (Entrevista à professora de Educação Especial, p. 14). Assim, com a ajuda da professora e colegas, o Artur melhorava o ritmo de trabalho bem como os desempenhos matemáticos. Por isso mesmo, tanto para os alunos surdos como para os restantes elementos desta turma, a regulação do ritmo de trabalho, sobretudo tratando-se de um 12.º ano de escolaridade, era um padrão interactivo que se revelava essencial para a promoção dos desempenhos dos alunos e que pudemos observar em todas as aulas a que assistimos, ou seja, que era bastante frequente e caracterizava as formas de actuação profissional desta docente.

Esquemas de reforço

De forma discreta, a professora de Matemática introduzia esquemas de reforço simples, mas nem por isso pouco eficientes, nos padrões de actuação, em aula. Por exemplo, recorria à confirmação dos passos dados na procura de uma solução para uma determinada tarefa. Esta situação podia ser iniciada pela própria professora, como incentivo à progressão na tarefa:

> Mariana [Dirigindo-se ao Dário] – Isso, é isso mesmo.
> (1.ª Aula observada, 26 de Novembro de 2008, p. 17)

Outras vezes, ocorria por solicitação dos próprios alunos:

> [O Artur pergunta se o que fez está bem. A Mariana diz que sim]
> Artur – Safei-me?
> Mariana – Safou. [Risos]
> (3.ª Aula observada, 14 de Janeiro de 2009, p. 39)

Os esquemas de reforço não partiam unicamente da professora. Os próprios colegas funcionavam como elementos incentivadores da aprendizagem uns dos outros. Por vezes, por partilharem a procura da resolução de uma tarefa, partilhavam, também, o prazer de chegar a uma resposta que consideravam ser adequada. Exemplo disso é o episódio que a seguir transcrevemos. O Artur e a colega de carteira, depois de discutirem sobre a opção correcta para resolução de um exercício de escolha múltipla, participam na discussão geral:

> Mariana – (…) logo a resposta é...?
> Melissa e Artur – É a D.
> Mariana – A D.
> [A Melissa e o Artur festejam, batendo com a palma da mão direita de um na do outro]
> (3.ª Aula observada, 14 de Janeiro de 2009, p. 38)

Por terem discutido previamente sobre a tarefa, os dois colegas sentiram-se suficientemente confiantes para responder a uma pergunta feita para toda a turma. Este aspecto, que observámos por diversas vezes – um dos dois estudantes surdos responder a uma pergunta que não lhe tinha sido especificamente dirigida – ilumina, também, o processo de inclusão destes dois estudantes surdos nas actividades matemáticas desenvolvidas em aula. A celebração de vitória que se seguiu desoculta, ainda, um processo de socialização alargada bem conseguido, por participar numa comemoração típica entre adolescentes, como o gesto que executaram em conjunto. Assim, podemos inferir um elevado nível de inclusão no grupo de pares, como seria desejável numa educação inclusiva.

Co-construção tutorial

Nas aulas a que assistimos era muito frequente observarmos a construção de uma resposta ou resolução passando por várias fases de interacção, que poderiam envolver apenas duas pessoas (professora/aluno ou aluno/aluno) ou toda a turma, durante as discussões gerais (professora/turma). As intervenções da Mariana eram, maioritariamente, constituídas por questões ou sugestões – o que constitui, em si mesmo, um padrão interactivo que caracteriza as suas práticas pedagógicas. Era nítido um esforço para evitar que as respostas fossem dadas aos alunos, optando antes pela oferta de um espaço/tempo (César, 2003) e ferramentas mentais (Vygotsky, 1932/1978) para que os alunos encontrassem as respostas pelos próprios meios. O excerto que se segue é um dos exemplos do que afirmámos:

> Mariana – Qual é a primeira coisa que tem de fazer aqui? U_n tende para que valor?
> Artur – Isso é muito confuso.
> Mariana – Pode ser muito confuso na primeira vez, mas depois são as mesmas conclusões. Lembre-se do que fizemos há pouco. (…) Tende para...?
> Artur – Tornam-se muito pequeninos.
> Mariana – Isto tende para...?
> Artur – -5, não?
> Mariana – Não. (…) Tente lá ver na calculadora.
> [A Mariana vai junto do Artur e ajuda-o a construir o gráfico na calculadora]
> (4.ª Aula observada, 21 de Janeiro de 2009, pp. 45-46)

Neste diálogo existem vários aspectos a destacar. Primeiro, a professora não contradiz o Artur quando este afirma que o conteúdo é confuso. Opta, antes, por lhe dizer que poderá ser assim, mas só no princípio, o que, implicitamente, transmite a mensagem "Eu sei que se persistires vais compreender". As mensagens implícitas são elementos fortíssimos, nas aprendizagens (matemáticas), bem como na adesão, ou rejeição, dos alunos, em relação às mesmas (César, 2003, 2009; César e Santos, 2006; Oliveira, 2006). Assim, as mensagens implícitas que se inferiam das formas de actuação desta professora constituíam um aspecto essencial do processo de inclusão de todos os alunos desta turma.

Outro detalhe que queremos salientar é a procura de aumentar o rigor no discurso do Artur. Quando ele afirma que a sucessão tende para valores "muito pequeninos", a Mariana, sem o criticar, repete a pergunta exigindo, através desta forma de actuação, uma resposta mais rigorosa. Por último, quando o Artur arrisca um valor como reposta, a Mariana poderia ter optado por terminar a interacção e dar a resposta pretendida mas, em vez disso, sugere-lhe outra forma de actuação para chegar ao valor desejado: o recurso à calculadora gráfica. Desta forma, a professora continua a incentivar que seja o aluno a procurar a resposta o que, mais uma vez, traz consigo uma mensagem implícita: a Mariana acredita que o Artur é capaz de encontrar a resposta por ele próprio, de melhorar os desempenhos em aula. A Mariana acredita que ele é capaz de aprender – um aspecto essencial para os alunos investirem nas aprendizagens escolares.

Esclarecimento de dúvidas

Como já referimos, durante a realização de trabalho autónomo, a professora circulava entre as carteiras. Ao fazê-lo, emergiam dois padrões de esclarecimento de dúvidas: os que eram iniciados pela professora; e os que eram solicitados pelos alunos. Estes esclarecimentos eram procurados pelos alunos de forma educada e paciente.

> O Dário põe o braço no ar. A Mariana não se apercebe e dirige-se ao Artur, para ver o andamento [do trabalho que está a realizar]. O Dário baixa o braço. A Mariana esclarece outra aluna e, quando acaba, o Dário volta a levantar o braço. A Mariana aproxima-se: confirma o que está feito e confirma o passo seguinte que o Dário pergunta se está, ou não, correcto.
> (2.ª Aula observada, 7 de Janeiro de 2009, p. 29)

Desta transcrição pode inferir-se um clima de sala de aula tolerante e a ausência de um grau de competição prejudicial à aprendizagem da turma. Quando a Mariana não se apercebe que o Dário a havia solicitado primeiro e se dirige a outro colega, ele baixa o braço, espera, e quando ela já está de novo disponível, volta a chamá-la. Isto sem manifestar desagradado e continuando a trabalhar enquanto aguarda.

Durante as observações que realizámos apercebemo-nos, também, que os alunos procuravam partilhar o que sabiam e construir, em conjunto, respostas às tarefas, solicitando a presença da professora só depois de não conseguirem avançar sozinhos. Estes momentos de esclarecimento de dúvidas entre colegas eram respeitados pela professora, como ilumina a seguinte transcrição: "[A Mariana] Volta junto do Dário, que está a falar com a Melissa sobre o exercício. Espera que a Melissa acabe de lhe explicar qualquer coisa e só depois intervém na discussão dos dois" (5.ª Aula observada, 4 de Fevereiro de 2009, p. 57). Com este tipo de actuação a professora, para além de incentivar à autonomia (competência essencial para alunos que se preparam para transitar para o ensino superior ou ingressar no mundo do trabalho), promove a entreajuda e o respeito pelos desempenhos matemáticos dos colegas, criando um espaço/tempo mais inclusivo.

O esclarecimento de dúvidas individuais podia originar contributos que eram úteis para mais elementos da turma:

> [O Dário fica um bocado mais a olhar para a resolução no quadro, enquanto rói uma unha e diz para a Núria, com ar aborrecido]
> Dário – Não percebi!
> [A Mariana está a explicar qualquer coisa à Alexandra e, quando regressa ao quadro, acrescenta a regra da derivada da [função] exponencial. O Dário faz uma cara que parece indicar que aquele detalhe o fez perceber o que faltava]
> (9.ª Aula observada, 25 de Março de 2009, p. 90)

Com este excerto, podemos perceber que, a dúvida de uma aluna, deu origem a um esclarecimento colectivo, tornando-se útil para outros colegas. Pela conversa que teve com a Alexandra, a professora inferiu que, relembrar a regra de derivação da função exponencial, talvez fosse benéfico para outros estudantes. Analisando a expressão facial do Dário, a inferência estava correcta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados iluminam um processo de inclusão bastante conseguido, no que diz respeito a estes dois surdos, enquanto estudantes de Matemática e como jovens pertencentes a um grupo de pares, no que habitualmente se designa por socialização alargada, que é um domínio onde os surdos costumam apresentar algumas dificuldades, devido às características comunicativas associadas à surdez severa e profunda (Sim-Sim, 2005).

As principais adaptações nas práticas de sala de aula, que a professora introduziu nesta turma e que pudemos observar, prendiam-se com a postura, o posicionamento espacial e o cuidado com a velocidade e articulação das palavras. Uma vez que pretendia que o Dário e o Artur participassem nas aulas, e por saber que o acesso à língua portuguesa constitui um desafio acrescido para os surdos, a professora passava frequentemente junto das carteiras onde se encontravam, assegurando-se que estavam a realizar as tarefas, que a progressão nas mesmas não era limitada por obstáculos linguísticos e que avançavam num ritmo de trabalho adequado.

Talvez por se tratar de uma turma do 12.º ano de escolaridade, não nos apercebemos de alterações na natureza das tarefas, nem das instruções. Ainda assim, foi notória uma preocupação, tanto da parte da professora como dos colegas ouvintes, em contribuir para que o Dário e o Artur se sentissem participantes legítimos daquela comunidade de aprendizagem, respeitando as características, interesses e necessidades dos dois estudantes. Relativamente às alterações introduzidas pelos colegas ouvintes na forma de comunicar quando interagem com os estudantes surdos, foi interessante observar que adoptavam formas de actuação semelhantes às da professora: cuidavam a articulação das palavras, falavam mais devagar quando era necessário, virando o rosto de frente para eles e simplificavam o discurso quando se apercebiam que a barreira era o vocabulário. As interacções horizontais (aluno/aluno) desempenharam diversas funções: contribuíram para o desenvolvimento da autonomia; promoveram a inter-ajuda, facilitando a inclusão dos estudantes surdos (e não só) naquela comunidade de aprendizagem; promoveram o desenvolvimento de aspectos ligados à socialização e a uma vivência saudável e descontraída da surdez do Dário e do Artur.

Gostaríamos, ainda, de salientar que a inclusão destes dois alunos surdos numa turma do ensino regular não foi apenas benéfica para eles, pois "(...) ao contrário do que muitas vezes se pensa, a existência de um aluno Surdo numa turma, ao exigir do professor um cuidado específico com a comunicação, facilita, também, a aprendizagem dos demais alunos ouvintes, tornando-se numa mais valia para todos" (Borges, 2009, p. 63). Assim, para além de facilitar as aprendizagens matemáticas dos alunos ouvintes, pela diversificação das formas de comunicação na sala de aula (e não só), esta experiência foi enriquecedora para todos em termos de socialização e cidadania.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: A experiência do projecto MAT789*. Lisboa: APM.

Abrantes, P., Serrazina, L., e Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação..

Ainscow, M., e César, M. (2006). Inclusive education ten years after Salamanca: Setting the agenda. *European Journal of Psychology of Education, XXI*(3), 231-238.

Allan, J., e Slee, R. (2008). *Doing inclusive education research*. *Rotterdam*: Sense Publishers.

Almeida, A. N. de (2009). *Os estudantes à entrada da universidade de Lisboa: 2008/09*. Lisboa: OPEST – Universidade de Lisboa. [Documento não publicado]

Armstrong, F., Armstrong, D., e Barton, L. (Eds.), (2000).'Vive la Différence?' Exploring context, policy and change in special education in France: *Developing cross-cultural collaboration*. Londres: David Fulton Publishers.

Bakhtin, M. (1929/1981). *The dialogical imagination* (M. Holquist, Ed.) (M. Holquist, e C. Emerson, Trans.). Austin: University of Texas Press.

Borges, I. (2009). *Alunos Surdos e a matemática: Dois estudos de caso, no 12.º ano de escolaridade do ensino regular*. Lisboa: DEFCUL. [Dissertação de mestrado, CdRom]

Carvalho, P. (2007). *Breve história dos Surdos: No mundo e em Portugal*. Lisboa: Surd'Universo.

César, M. (2003). A escola inclusiva enquanto espaço-tempo de diálogo de todos e para todos. In D. Rodrigues (Ed.), *Perspectivas sobre a inclusão: Da educação à sociedade* (pp. 117-149). Porto: Porto Editora.

César, M. (2009). Listening to different voices: Collaborative work in multicultural maths classes. In M. César, e K. Kumpulainen (Eds.), *Social interactions in multicultural settings* (pp. 203-233). Roterdão: Sense.

César, M., e Ainscow, M. (Eds.) (2006). Inclusive education ten years after Salamanca. *European Journal of Psychology of Education, XXI*(3).

César, M., e Kumpulainen, K. (Eds.) (2009). *Social interactions in multicultural settings*. Roterdão: Sense.

César, M., e Oliveira, I. (2005). The curriculum as a mediating tool for inclusive participation: A case study in a Portuguese multicultural school. *European Journal of Psychology of Education, XX*(1), 29-43.

César, M., e Santos, N. (2006). From exclusion to inclusion: Collaborative work contributions to more inclusive learning settings. European Journal of Psychology of Education, XXI(3), 333-346.

Clandinin, D. J., e Connelly, F. M. (1998). Personal experience methods. In N. K. Denzin, e Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (pp. 150-178). Thousand Oaks: Sage.

Cobb, P., e Hodge, L. (2007). Culture, identity, and equity in the mathematics classroom. In N. Nasir, e P. Cobb (Eds.), *Diversity, equity, and access to mathematical ideas* (pp. 159-171). Nova Iorque: Teachers College Press.

Denzin, N. (2002). The interpretative process. In A. Haberman, e M. Mieles (Eds.), *The qualitative researchers companion* (pp. 349-366). Thousand Oaks: Sage.

Denzin, N., e Lincoln, Y. (1998). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. Denzin, e Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative inquiry* (pp. 1-34). Thousand Oaks: Sage.

Freire, S. (2006). *O processo de inclusão de alunos surdos na escola regular: Um estudo de caso*. Lisboa: DEFCUL. Tese de doutoramento.

Hamido, G., e César, M. (2009). Surviving within complexity: A meta-systemic approach to research on social interactions in formal educational scenarios. In K. Kumpulainen, C. Hmelo-Silver, e M. César (Eds.), *Investigating classroom interaction: Methodologies in action* (pp. 229-262). Roterdão: Sense Publishers.

Melro, J. (2003). *Escola Inclusiva: Uma história de amor (nem) sempre bem contada*. Lisboa: DEFCUL. [Dissertação de mestrado, documento policopiado]

Ministério da Educação (ME) (2008). Decreto-Lei n.º 3/08, de 7 de Janeiro, Diário da República – I Série, N.º 4. Lisboa: INCM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (M. Melo, Trad.). Lisboa: APM.

Oliveira, I. (2006). *Uma alternativa curricular no 2.º ciclo do ensino básico: Vivências e reflexões*. Lisboa: DEFCUL. [Tese de doutoramento, CdRom]

Ponte, J. P., Matos, J. M., e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Precatado, A., Lopes, A.V., Baeta, A., Loureiro, C., Ferreira, E., Guimarães H. M. et al. (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Renshaw, P. (2004). Introduction. Dialogic teaching, learning and instruction: Theoretical roots and analytical frameworks. In J. van der Linden, e P. Renshaw (Eds.), *Dialogic learning: Shifting perspectives to learning, instruction, and teaching* (pp. 1-15). Dordrecht: Kluwer

Rodrigues, D. (2003). Educação inclusiva: As boas notícias e as más notícias. In D. Rodrigues (Ed.), *Perspectivas sobre a inclusão: Da educação à sociedade* (pp. 89-101). Porto: Porto Editora.

Ruela, A. (2000). O aluno surdo na escola regular: A importância do contexto familiar e escolar. Lisboa: IIE.

Serrazina, L., e Monteiro, C. (2003). Professores e novas competências em Matemática no 1.º ciclo. In A. Cosme, H. Pinto, H. Menino, I. Rocha, M. Pires, M. Rodrigues, R. Cadima, e R. Costa (Eds.), *Actas do XIV SIEM* (pp. 467-482). Santarém: APM.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse that meets the ears: Learning from mathematical communication things that we have not known before. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge: Cambridge University

Sim-Sim, I. (2005). O ensino do português escrito aos alunos surdos na escolaridade básica. In I. Sim-Sim (Ed.), *A criança surda: Contributos para a sua educação* (pp. 15-28). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stake, R. E. (1995). The art of case study research. Thousand Oaks: Sage.

UNESCO (1994). *Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais*. Lisboa: UNESCO.

Vygotsky, L. S. (1932/1978). *Mind and society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, Trans.). Cambridge MA: Harvard University

Zittoun, T. (2006). Transitions: Development through symbolic resources. Greenwich: Information Age Publishing.

Comunicar sem ver: um estudo sobre formas de comunicação com alunos cegos em aulas de matemática

Cláudia Ventura
Unidade Investigação, Educação e Desenvolvimento
Nuno Santos
Escola Secundária de D. Dinis, Lisboa
Margarida César
Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Lisboa

RESUMO

A comunicação em aula é essencial para todos os alunos se tornarem matematicamente competentes. É muito importante para que a Escola seja um cenário de inclusão, nomeadamente para alunos cegos. Este estudo faz parte do projecto Interacção e Conhecimento (IC). Assumimos uma abordagem interpretativa e realizámos uma investigação-acção. Pretendemos identificar os elementos facilitadores da inclusão de alunos cegos nas aulas de matemática e as barreiras no acesso ao sucesso académico. Procurámos formas de superar estas barreiras, nomeadamente as resultantes da escrita Braille aplicada à matemática. Os participantes são estes alunos cegos, os seus colegas de turma, dois professores/investigadores, uma psicóloga do projecto IC e professores de apoio dos alunos cegos. Os principais instrumentos de recolha de dados são a observação, entrevistas, conversas informais, recolha documental e protocolos dos alunos. Os dados foram tratados e analisados através de uma análise de conteúdo narrativa, sucessiva e aprofundada. Apresentamos e discutimos alguns exemplos. Salientamos o papel que as interacções sociais desempenham na inclusão de um aluno cego numa turma do ensino regular, bem como procedimentos simples, que podem tornar a inclusão e acesso ao sucesso escolar possíveis, em vez de meros ideais.

Em 1994, o governo português, acompanhado por outros noventa e um governos mundiais, assinou a Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994), produzida durante a Conferência Mundial sobre Necessidades Educativas Especiais. Esta declaração resultou do sentimento geral de insatisfação face à situação em que se encontrava a educação dos alunos categorizados como apresentando Necessidades Educativas Especiais (NEE). Apesar de já se ter assistido a uma alteração desde a segregação destes alunos em escolas ou instituições de ensino especial, para a integração destes alunos nas escolas do ensino regular, tal mudança não era, ainda, satisfatória. Até ser assumido o paradigma da inclusão, procurava-se a normalização, ou seja, que os alunos cegos fossem o mais parecidos possível com os ditos normovisuais. Posteriormente, compreendeu-se que o caminho a seguir era diferente e passava por valorizar as características dos cegos, promovendo as suas potencialidades.

A Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994) simboliza uma ruptura em relação ao paradigma da integração, adoptando-se o paradigma da inclusão. Quando se fala de ruptura significa que a inclusão não é uma forma mais completa de integração. Parte de princípios epistemológicos distintos e, por isso mesmo, tem subjacentes formas de organização escolar e práticas, em aula, também distintas (César e Ainscow, 2006; Rodrigues, 2003). Com a assinatura desta declaração, os diversos intervenientes assumem que não são os alunos categorizados como apresentando NEE que se devem adaptar à Escola, mas é a Escola que tem de se adaptar às particularidades de todos os alunos, nomeadamente dos alunos categorizados como apresentando NEE. Assim, a Escola deve valorizar as características, interesses e necessidades de cada aluno, potenciando o seu desenvolvimento e tornando o acesso ao sucesso escolar equitativo (Ainscow e César, 2006; César, 2009). Os alunos categorizados como apresentando NEE devem ser encarados, pela Escola, como uma riqueza, sendo a sua participação nas actividades da aula um contributo para que os processos de ensino e de aprendizagem de todos os alunos tenham mais qualidade, sejam mais aprofundados e permitam o desenvolvimento sócio-cognitivo e emocional de todo e qualquer aluno (César, 2003).

Pretende-se, assim, que as escolas adoptem e ponham em prática os princípios da educação inclusiva, preconizados pela Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994) e legislados, em Portugal, através do Decreto-Lei nº 3/08 (ME, 2008). Este Decreto-Lei subscreve os princípios da educação inclusiva, nomeadamente para os alunos cegos que frequentam escolas do ensino regular diurno, designadas, neste documento, como escolas de referência, ou seja, escolas particularmente bem equipadas, em termos materiais, e com recursos humanos apropriados às exigências dos processos de ensino e de aprendizagem dos alunos categorizados como apresentando NEE. No entanto, não basta legislar para que as práticas mudem. Tal como outras alterações que ocorrem na Escola, também esta mudança na educação de alunos categorizados como apresentando NEE não decorreu de forma rápida e sem polémicas associadas. Ainda hoje a Escola se depara com vários desafios que resultam da transição para o paradigma da educação inclusiva. Esta transição pressupõe uma reorganização estrutural e funcional da Escola, o que nem sempre ocorre sem contestações ou limitações. Para Santos e César (2007), a escola precisa de organizar-se, ela própria, de uma forma inclusiva, o que implica, entre outras mudanças, uma maior partilha de responsabilidades e mais trabalho colaborativo entre os professores e demais agentes da comunidade educativa. Estas mudanças pressupõem mudar rotinas, como o tipo de horários que se concebem para os professores de uma mesma turma, ou os momentos que estes partilham para trabalharem em conjunto, e a mudança não é isenta de dúvidas, de ansiedade e, até, de formas, mais ou menos activas, de resistência. (s/ p.)

Para além destas alterações na organização da escola, a adopção dos princípios da educação inclusiva pressupõe, também, grandes mudanças no papel do professor e nas práticas que este desenvolve, dentro e fora das aulas, nomeadamente no que se refere à forma como encara o currículo (César e Ainscow, 2006). É necessário que o professor deixe de ser um executor, um simples aplicador de um currículo, tornando-se um construtor de currículos, adaptados a cada aluno, através da forma como são operacionalizados, ou seja, das tarefas escolhidas, das formas de gestão dos espaços e da organização do trabalho (individual, em díades, em grupos), passando pelas formas de avaliação previstas e pelo contrato didáctico estabelecido (César, 2003, 2009; César e Ainscow, 2006; Santos, 2008; Santos, Ventura, e César, 2008).

A matemática é uma disciplina que assume um papel muito importante no percurso académico dos alunos, já que a classificação obtida nesta disciplina configura, muitas vezes, as escolhas vocacionais que os alunos realizam e/ou podem vir a realizar. Também Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) salientam a importância do papel da matemática quando referem que “Aprender Matemática é um direito básico de todas as pessoas – em particular, de todas as crianças e jovens (...)” (p. 17). No entanto, é uma disciplina comummente associada a atitudes de rejeição por parte dos alunos e a elevadas taxas de insucesso escolar (Abrantes, 1994; César, 2009; Oliveira, 2006). As dificuldades que, geralmente, são associadas à matemática tornam-se ainda mais relevantes quando nos referimos a alunos categorizados como apresentando NEE, nomeadamente alunos cegos (Santos, 2008; Santos e César, 2007; Santos et al., 2008).

Quando analisamos o desenvolvimento cognitivo de uma criança cega, podemos observar que este segue percursos distintos dos seguidos por uma criança dita normovisual (Ochaíta, 1993). Esta diferença deve-se, em grande parte, ao papel importante que a visão desempenha no desenvolvimento de uma criança dita normovisual. Na opinião deste autor, uma criança privada do sentido da visão tem, necessariamente, de se desenvolver de uma forma diferente de uma criança com acesso a este sentido. No entanto, como refere, apesar de seguirem percursos distintos, os cegos e as pessoas ditas normovisuais podem desenvolver um conjunto de capacidades e competências que se pode considerar bastante semelhante, principalmente quando nos focamos numa fase mais avançada do desenvolvimento e a criança cega pode vivenciar experiências de aprendizagem estimulantes, ricas e diversificadas.

Para as diferenças no percurso de desenvolvimento cognitivo não se traduzirem em diferenças nas capacidades e competências de uma criança cega, esta deve ser, na opinião de Ochaíta (1993), incentivada a optimizar vias alternativas à visão. Desta forma, uma criança cega poderá desenvolver todas as suas potencialidades. Mas para este desafio ser atingido, é desejável que pais, professores e alunos trabalhem colaborativamente, para ultrapassarem as barreiras comunicacionais e promoverem formas de aprendizagem sensorialmente diversificadas.

Quando nos focamos na aprendizagem da matemática e no conjunto de capacidades e competências que se pretende que um aluno desenvolva no âmbito desta disciplina, no ensino básico e no ensino secundário, podemos constatar que algumas das dificuldades que comummente são associadas à matemática ganham nova dimensão quando nos referimos a alunos cegos. No entanto, é de notar que, apesar da relevância apontada pela Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994) para a inclusão dos alunos categorizados como apresentando NEE nas escolas de ensino regular, poucos estudos se têm realizado, em Portugal, que se debrucem sobre alunos cegos e a aprendizagem da matemática em aulas do ensino regular. Ilustrando isso mesmo, em Ponte, Matos e Abrantes (1998), quando faz um balanço da investigação em educação matemática realizada em Portugal até essa data, não há qualquer referência a estudos deste tipo, sobre alunos cegos. E, em revisões de literatura mais recentes, poucos são os estudos encontrados que se foquem especificamente sobre a aprendizagem da matemática em aulas do ensino regular (Santos, 2008). Assim, existe uma carência nítida de investigações produzidas neste domínio e feitas com seriedade, ou seja, por investigadores especializados, que dominem a grafia Braille e se possam aperceber da complexidade em jogo.

A matemática exige que os alunos desenvolvam capacidade de abstracção, dificuldade que é potenciada pelo uso de um código simbólico diferente do que é usado pela maioria dos alunos de uma turma do ensino regular. Por outro lado, a comunicação matemática requer o uso de uma grande variedade de formas de representação, desde a interpretação de figuras à utilização de gráficos para a resolução de um problema. Ao não terem acesso à percepção visual, os alunos cegos precisam de criar imagens mentais das figuras, gráficos e outros materiais de forte componente visual. Santos (2008) relata como uma professora de 12º ano de escolaridade, leccionando funções, usava as mãos do aluno cego para desenhar, no tampo da mesa, os gráficos que estavam no quadro. Alguns estudos de psicologia mostram como a associação entre movimento e pensamento é essencial para a construção de imagens mentais, sobretudo nos primeiros anos de vida (Vygotsky, 1934/1962). Mas, para um aluno cego, esta associação continua a ser necessária, pois eles não têm acesso às informações captadas pela visão. Neste exemplo, apercebemo-nos de que este tipo de barreira não é incontornável. Mas é preciso arranjar formas de comunicação que permitam ultrapassá-lo e dotar as escolas dos meios tecnológicos necessários e os professores dos conhecimentos sobre esses mesmos meios para evitar situações de injustiça flagrantes.

O professor de matemática de uma turma do ensino regular que tenha um aluno cego deve, assim, adaptar as práticas a este aluno e às suas necessidades específicas, nomeadamente no que diz respeito às particularidades da comunicação que este é capaz de estabelecer (Ainscow e

César, 2006; César, 2009). Mas, neste processo, o professor não pode esquecer os alunos ditos normovisuais que também fazem parte daquela turma. Uma forma de incluir todos os alunos nas actividades desenvolvidas em aula é a adopção de práticas de trabalho colaborativo (César, 2009; Santos e César, 2007). Também Batista (2005) salienta a importância que as interacções sociais desempenham no desenvolvimento de uma criança cega, já que estas permitem que a criança organize melhor as informações que obtém através dos outros sentidos.

O trabalho colaborativo permite, quando implementado conjuntamente com tarefas desafiantes e potenciadoras da comunicação entre os alunos e um contrato didáctico coerente, que os alunos interajam na resolução das tarefas e co-construam o seu próprio conhecimento. Desta forma, cada aluno torna-se um participante legítimo (César, 2007; Lave e Wenger, 1991) nas actividades desenvolvidas nas aulas de matemática. Este sentimento de pertença e de inclusão nas actividades realizadas permite que o aluno, para além de desenvolver as capacidades e competências matemáticas, aumente a auto-estima positiva, potenciando, assim, o acesso ao sucesso escolar e às ferramentas culturais da matemática (Santos, 2008; Santos e César, 2007).

METODOLOGIA

O problema que deu origem a este estudo é algo com que nos deparamos quando desenvolvemos uma actividade docente em contextos de educação formal: a dificuldade sentida, por muitos professores de matemática, na inclusão de um aluno cego numa turma do ensino regular diurno. Pretendemos, através da realização deste trabalho, compreender melhor as formas de comunicação que os professores de matemática estabelecem com alunos cegos incluídos em turmas do ensino regular, as adaptações que se podem observar nas práticas desenvolvidas pelos professores e as interacções que se geram entre os alunos da turma (cegos e os designados, como normovisuais). Pretendemos, também, identificar barreiras com que se deparam o professor e os alunos no estabelecimento de formas de comunicação entre si e o que pode ser alterado neste processo, por forma a que algumas destas barreiras sejam derrubadas.

Este estudo faz parte do projecto Interacção e Conhecimento, que teve a duração de 12 anos (1994/95 a 2005/06). Tinha como principal objectivo estudar e promover a apropriação de conhecimentos matemáticos, bem como a mobilização/desenvolvimento de capacidades e competências, através da implementação de trabalho colaborativo, criando cenários de educação formal mais inclusivos (Hamido e César, 2009). Desenvolveu-se em três níveis, quanto ao seu design: (1) quasi-experimental, onde se estudaram diferentes tipos de díades, tarefas e interacções sociais entre pares (Carvalho, 2001; Monteiro, 2003); (2) investigação-acção, no qual os professores implementavam trabalho colaborativo nas turmas, pelo menos durante um ano lectivo (César, 2009; Santos e César, 2007; Santos et al., 2008); e (3) estudos de caso, muitos deles referentes a alunos que estavam caracterizados como apresentando NEE (Santos, 2008).

Este estudo assume uma abordagem interpretativa (Denzin, 2002) e insere-se no segundo nível do projecto Interacção e Conhecimento (IC), ou seja, trata-se de uma investigação-acção. Esta opção prende-se com o carácter interventivo que pretendíamos implementar neste trabalho (Mason, 2002). A necessidade que sentimos de conhecer e compreender melhor as formas de comunicação que se estabelecem numa aula de matemática em que participam alunos cegos está na base da opção pelo paradigma interpretativo. Tal como refere Denzin (2002), quando realizamos um estudo inserido no paradigma interpretativo não podemos esperar a validação de uma qualquer conclusão ou a verificação de uma relação de causalidade, mas uma melhor compreensão de um fenómeno que se pretende estudar.

Participaram neste estudo todas as turmas de matemática do IC que incluíam alunos cegos [N=11]. Frequentavam o 5.º ao 12.º ano de escolaridade, em escolas da Grande Lisboa e Algarve. Os participantes são dois professores/investigadores, os alunos destas turmas, os professores de apoio dos alunos cegos e uma das psicólogas do projecto IC. Recolhemos os dados através de observação participante (registada em diários de bordo dos professores/investigadores e, por vezes, áudio gravada), questionários, protocolos de alunos, instrumento de avaliação de capacidades e competências, tarefas de inspiração projectiva, recolha documental, conversas informais e entrevistas. Focamo-nos nos dados recolhidos através da observação e nos protocolos dos alunos. Realizámos uma análise de conteúdo narrativa (Clandinin e Connelly, 1998), da qual emergiram categorias indutivas (Hamido e César, 2009).

Como é habitual no projecto IC, os alunos cegos participaram em todas as actividades matemáticas desenvolvidas em aula, ou seja, estas foram adaptadas de modo a que eles, em interacção com os pares, pudessem participar. Tal como também é habitual, na 1ª semana de aulas os alunos responderam a um questionário de caracterização pessoal, a uma tarefa de inspiração projectiva e a um instrumento de avaliação de capacidades e competências. Baseando-se nestes elementos e na observação participante, os professores decidiram como formar as primeiras díades, já que a sua formação é responsabilidade dos professores. Assim, estes alunos trabalharam colaborativamente durante todo o ano lectivo. Esta forma de actuação, em aula, foi essencial para promover a participação dos alunos cegos, nomeadamente por que eles também explicaram algumas das estratégias de resolução que tinham utilizado no instrumento de avaliação de capacidades e competências começando a sentir-se, desde a 1ª semana de aulas, como participantes legítimos e não como participantes periféricos (César, 2007; Lave e Wenger, 1991), como tantas vezes acontece com estes alunos.

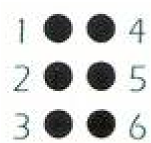
RESULTADOS

Grafia Braille

A partir dos dados recolhidos, analisamos diversos exemplos que iluminam o papel do professor no processo de aprendizagem de alunos cegos. A forma como o professor altera os padrões comunicacionais quando interage com alunos cegos ilustra a forma como o professor adapta a prática lectiva às especificidades dos alunos. Por exemplo, quando um professor tem uma turma com um aluno cego, não pode utilizar expressões do tipo "este número" ou "aquela equação" enquanto aponta para qualquer frase escrita no quadro. Desta forma, estaria a limitar o acesso do aluno cego a informação relevante para a sua participação em aula.

Também realçamos a importância da grafia Braille nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, nomeadamente no que diz respeito ao conhecimento que o professor tem da grafia matemática Braille. A aprendizagem desta grafia torna-se muito importante para que o professor consiga interagir com o aluno cego não o confundindo, pois a grafia matemática Braille apresenta algumas particularidades que devem ser tidas em conta, pelo professor, na forma como interage com os alunos. A grafia Braille tem por base a célula Braille (ver Figura 1), constituída por seis pontos. Cada letra ou número é constituído por uma célula ou por uma combinação de células, que podem ter diferentes significados consoante o contexto em que estão inseridas. Por exemplo, na grafia Braille para a matemática, escreve-se recorrendo à sequência de símbolos "àùx"- (Santos et al., 2008).

Figura 1: Célula Braille.



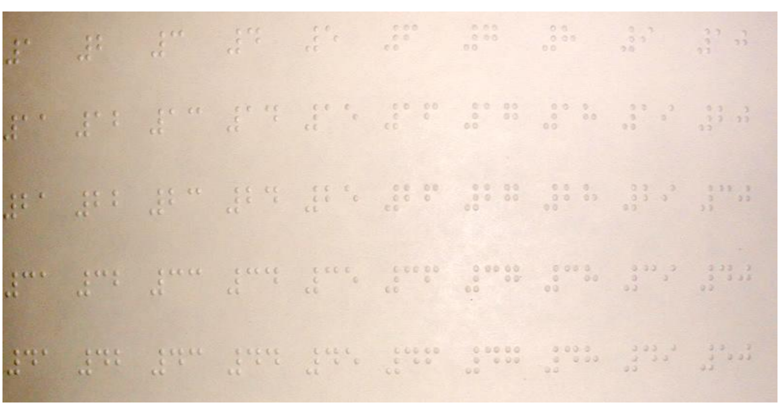
Também a utilização de fracções na grafia Braille requer algum cuidado, já que a grafia Braille admite apenas uma linha, pelo que as fracções têm, muitas vezes, de ser escritas recorrendo a parênteses auxiliares, deixando de fazer sentido as expressões habitualmente utilizadas em aulas de matemática como "o número de cima" ou "a parte de baixo", em vez das expressões correctas: numerador ou denominador. Para além disso, é frequente ouvirmos dizer, em aulas de matemática, quando os alunos estão a resolver expressões numéricas com fracções e parênteses, que começam por resolver o que lhes permite retirar os parênteses. Isto torna-se confuso para os alunos cegos, já que as fracções, para eles, também são indicadas por parênteses. Assim, é importante que o professor domine a grafia matemática Braille para que possa adaptar o discurso à forma como este é entendido por um aluno cego, bem como para que possa seguir o raciocínio de um aluno cego quando este procura resolver uma determinada tarefa ou, até, para lhe esclarecer uma dúvida.

O uso de parênteses na escrita de fracções na grafia Braille para a matemática é importante, também, para os alunos ditos normovisuais, já que permite relembrar as regras das operações e compreender a sua importância. Também o uso da calculadora para a realização de operações com fracções ou para o estudo gráfico de funções (no ensino secundário) pode ser beneficiado pela explicitação da forma como se escreve uma fracção em Braille. O professor deve incentivar os alunos ditos normovisuais a conhecerem as especificidades da grafia Braille para a matemática, devendo ser valorizado o rigor e o detalhe com que explicitam os raciocínios ou as estratégias de resolução a que recorreram. É neste sentido que é de salientar a importância da implementação, nas aulas de matemática, de práticas de trabalho colaborativo. O trabalho colaborativo, quando utilizado conjuntamente com tarefas matemáticas diversificadas e adaptadas a este tipo de trabalho, bem como a um contrato didáctico que valorize a interacção entre os alunos, facilita o desenvolvimento sócio-cognitivo dos alunos e as aprendizagens matemáticas. Em turmas de ensino regular onde participam alunos cegos, as potencialidades do trabalho colaborativo tornam-se ainda mais visíveis, como ilustram as evidências encontradas nesta investigação.

Crivo de Eratóstenes

Uma das actividades desenvolvidas colaborativamente pelos alunos numa aula de matemática foi o Crivo de Eratóstenes. Este crivo consiste numa tabela com números naturais consecutivos (neste caso, todos os números naturais até 50) e a partir da qual é possível seleccionar quais destes são números primos. A utilização do Crivo de Eratóstenes tem por base a eliminação dos números composto, ou seja, que não são primos, através dos conjuntos de divisores ou múltiplos de um número.

Figura 2 – Lista de números em Braille.



Quando um aluno dito normovisual utiliza o Crivo de Eratóstenes risca todos os números compostos ficando, então, com uma lista de números primos. No entanto, esta tarefa tem de ser adaptada aos alunos cegos já que, para estes, não faz sentido riscar um número (ou uma célula Braille) pois, apesar de o poderem fazer, não conseguem, posteriormente, ler o que está riscado. Um aluno cego tem acesso ao Crivo de Eratóstenes através do tacto, já que a grafia Braille tem por base o relevo com que são marcados cada um dos pontos que compõem uma célula. Se um aluno cego eliminar esse relevo, pressionando os diferentes pontos, deixará de conseguir ler os números que estavam escritos no Crivo, ou seja, apagará esses números. Desta forma, se um aluno cego apagar todos os números compostos, ficará com uma lista de números primos, cumprindo o objectivo da actividade.

Esta tarefa foi proposta aos alunos no início do ano lectivo, momento em que os alunos ainda não tinham interiorizado de forma muito nítida o contrato didáctico implementado na aula de matemática que se baseia, principalmente, no trabalho colaborativo. Assim, os alunos ainda estavam num processo de adaptação a esta nova forma de trabalho e de interacção com os outros.

Figura 3 – Lista de números a negro.

3. Um método muito prático de arranjar números primos foi idealizado pelo sábio grego Eratóstenes (275-195 A.C.). O seu método é chamado Crivo de Eratóstenes. Agora vão construir o crivo de Eratóstenes para saber todos os números primos até 50.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

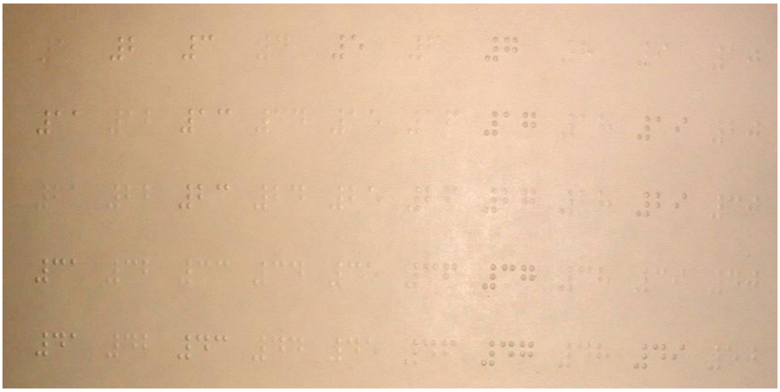
O procedimento consiste em eliminar todos os números que não sejam primos.

O exemplo que apresentamos diz respeito a uma díade formada por um aluno cego e por uma aluna dita normovisual. O aluno cego (X) era um aluno pouco autónomo que apresentava uma auto-estima negativa, pelo que abordou a tarefa proposta apagando com muito cuidado os números compostos, solicitando a confirmação da sua colega antes de apagar qualquer dos números. O seu par (Y) respondeu mas, quando chegou ao número 10, reagiu respondendo-lhe com uma nova pergunta, dando origem ao seguinte diálogo:

> Y – Não sei, o que é que achas?
> [O aluno X fica a pensar]

Y – Podes dividir o 10 por mais de dois números?
X – [Depois de pensar um pouco] Sim, por 1, 10... e 2.
Y – O número 10 é primo, ou não?
X – Não é primo

Figura 4 – Lista dos números primos em Braille.

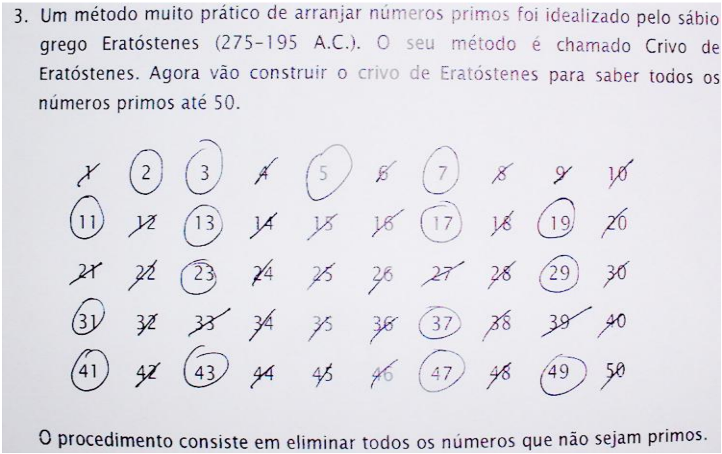


O exemplo que apresentamos diz respeito a uma díade formada por um aluno cego e por uma aluna dita normovisual. O aluno cego (X) era um aluno pouco autónomo que apresentava uma auto-estima negativa, pelo que abordou a tarefa proposta apagando com muito cuidado os números compostos, solicitando a confirmação da sua colega antes de apagar qualquer dos números. O seu par (Y) respondeu mas, quando chegou ao número 10, reagiu respondendo-lhe com uma nova pergunta, dando origem ao seguinte diálogo:

Y – Não sei, o que é que achas?
[O aluno X fica a pensar]
Y – Podes dividir o 10 por mais de dois números?
X – [Depois de pensar um pouco] Sim, por 1, 10... e 2.
Y – O número 10 é primo, ou não?
X – Não é primo

.A partir desta interacção entre os alunos, o X ganhou confiança no seu raciocínio e deixou de requerer confirmação para cada um dos seus passos. Assim, passou a fazer perguntas da forma “Também vais eliminar o número Z, não vais?”. Estes alunos discutiram, também, números como o 29 que, por ser primo, apresenta um maior grau de desafio. Por outro lado, os alunos puderam, através da interacção entre eles, co-construir o seu próprio conhecimento, decidindo, por exemplo, riscar ou apagar todos os números pares maiores que 2, já que todos eles, por serem divisíveis por 1, 2 e o próprio número, não são números primos.

Figura 5 – Lista dos números primos a negro.



Trabalhar com uma colega bastante autónoma, permitiu que o X desenvolvesse, também, a sua autonomia, já que a Y, em vez de lhe dizer as respostas a todas as suas perguntas, adopta uma atitude questionadora, desafiando-o a progredir por si próprio. Ela procura, assim, que o seu colega passe a ter mais confiança nas suas capacidades e competência, bem como mais autonomia, na resolução das tarefas. A Y revela o cuidado de permitir ao seu colega ter tempo para pensar, respeitando o ritmo dele, a calma necessária para não cair na tentação de responder imediatamente às perguntas, dando espaço ao X para desenvolver as suas capacidades e competências matemáticas.

Ao longo do ano lectivo, o X mudou a forma de estar nas aulas de matemática, bem como a atitude perante a escola. Em alguns meses, tornou-se mais participativo nas aulas, apresentando uma atitude mais segura, com menos medo de falhar ou de deixar conhecer as dúvidas que tinha. Passou a ser capaz de reconhecer as dificuldades e, para além disso, a ter consciência de que, com algum trabalho, podia ultrapassá-las. Trabalhar colaborativamente permitiu-lhe desenvolver uma atitude mais positiva relativamente à matemática e uma auto-estima académica mais positiva.

Quando trabalham colaborativamente, os alunos partilham os seus raciocínios e estratégias de resolução o que, no caso de um aluno cego e de um dito normovisual, se torna particularmente importante. Esta colaboração exige que os dois alunos adaptem as suas formas de comunicação ao colega com quem pretendem comunicar, ou seja, que construam uma intersubjectividade (César, 2009). O aluno dito normovisual sente a necessidade de comunicar oralmente o seu raciocínio e de explicar qualquer desenho ou esquema que pretenda realizar. Esta atitude torna-se, também, uma mais-valia para o aluno dito normovisual, já que lhe permite desenvolver a capacidade de comunicar matematicamente, de argumentar de forma sustentada, de organizar o raciocínio, bem como lhe exige um grande domínio da terminologia específica desta disciplina. O aluno cego procura, também, explicar ao colega a forma como procura resolver a tarefa, já que esta não está, muitas vezes, acessível aos restantes colegas, que não dominam, com velocidade de leitura, a grafia Braille ou algumas das características dos materiais tecnológicos a que os cegos recorrem, em aula. Esta situação exige, por parte do aluno cego, também uma grande organização do raciocínio, já que este dificilmente se pode apoiar em esquemas ou desenhos, bastante rigor na utilização da terminologia matemática e capacidade de argumentação e de perceber, pela entoação do colega, pelos silêncios, se ele está a acompanhar a sua estratégia de resolução, ou não. Assim, a necessidade de ambos adaptarem as formas de comunicação às especificidades do par leva-os a melhorem as suas capacidades comunicacionais de uma forma muito mais elaborada do que a que sucederia se todos os alunos fossem cegos, ou todos ditos normovisuais.

O exemplo que apresentámos, que se refere ao Crivo de Eratóstenes, foi apenas uma das muitas tarefas propostas aos alunos que participaram neste estudo e que precisaram de algumas adaptações para poderem potenciar o desenvolvimento das capacidades e competências de todos os alunos, nomeadamente dos alunos cegos. Também devemos realçar as actividades realizadas no âmbito de conteúdos relacionados com geometria. No ensino da geometria, o recurso a materiais manipuláveis é um dos aspectos aconselhados pelos documentos de política educativa (Abrantes et al., 1999). Nas aulas de matemática, numa turma do ensino regular, com um aluno cego, a utilização de materiais manipuláveis exerce um papel ainda mais relevante, já que o aluno cego pode compensar a falta do sentido da visão pela utilização e desenvolvimento dos restantes sentidos, em particular do tacto. Por exemplo, no estudo das simetrias dos triângulos e quadriláteros recorremos a figuras recortadas em cartolina. Os alunos estavam organizados em grupos de 4, nos quais se incluíam os alunos cegos. Recorrendo às dobragens da cartolina, podiam identificar-se os eixos de simetria dos polígonos. Este estudo era registado para, em seguida, ser apresentado na discussão geral, em grande grupo (turma). Assim, a utilização de materiais manipuláveis permitiu que os alunos cegos participassem activamente na construção do conhecimento no que diz respeito aos eixos de simetria de polígonos. O trabalho colaborativo serviu de facilitador, já que favoreceu que esta manipulação fosse um elemento mediador da interacção que se gera entre os elementos de uma díade ou de um pequeno grupo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos vários aspectos iluminados pela realização deste estudo, podemos observar a importância que o trabalho colaborativo e a comunicação têm nos processos de ensino e de aprendizagem de alunos cegos incluídos em turmas do ensino regular. A implementação de práticas de trabalho colaborativas nas aulas de matemática permitem que todos os alunos, em particular os alunos cegos, tenham um papel mais activo na construção do conhecimento, tornando-se mais autónomos e com uma capacidade de comunicação matemática e argumentação sustentada mais desenvolvidas. Também é importante realçar o papel que o professor deve assumir no que concerne à conciliação entre as diferentes formas de comunicar que coexistem numa aula de matemática em que está incluído um aluno cego. Desde as alterações ou especificações que devem ser feitas à língua oral portuguesa, utilizada por todos os intervenientes na aula, à compreensão da grafia Braille e das suas particularidades, é necessário que o professor adapte as práticas às especificidades dos alunos, neste caso, dos alunos cegos. A realização deste estudo permitiu-nos compreender as formas de comunicação matemática e de interacção de (e com) alunos que comunicam sem conseguirem ver. Compreendendo estes aspectos, podemos procurar contribuir para minimizar a barreiras que se erguem entre um aluno cego e o acesso ao sucesso académico à disciplina de matemática, bem como às ferramentas culturais da matemática.

AGRADECIMENTOS

O projecto Interacção e Conhecimento foi parcialmente subsidiado pelo IIE, em 1996/97 e em 1997/98, medida SIQE 2 (projecto nº 7/96), e pelo CIEFCUL, desde 1996. Agradecemos a todos os participantes que tornaram este projecto possível.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: A experiência do projecto MAT789*. Lisboa: APM. [Tese de doutoramento]

Abrantes, P., Serrazina, L., e Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica: Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ainscow, M., e César, M. (2006). Inclusive education ten years after Salamanca: Setting the agenda. *European Journal of Psychology of Education, XXI*(3), 231-238.

Batista, C. G. (2005). Formação de conceitos em crianças cegas: Questões teóricas e implicações educacionais. *Psicologia: Teoria e pesquisa, 21*(1), 7-15.

Carvalho, C. (2001). *Interacção entre pares: Contributos para a promoção de desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico, no 7º ano de escolaridade*. Lisboa: APM. [Tese de doutoramento]

César, M. (2003). A escola inclusiva enquanto espaço-tempo de diálogo de todos e para todos. In D. Rodrigues (Ed.), *Perspectivas sobre a inclusão: Da educação à sociedade* (pp. 117-149). Porto: Porto Editora.

César, M. (2007). Dialogical identities in students from cultural minorities or students categorised as presenting SEN: How do they shape learning, namely in mathematics?. In ScTIG Group (Eds.), *2nd socio-cultural theory in educational research & practice conference proceedings*. Manchester: University of Manchester. [On line: www.lta.education.manchester.ac.uk/ScTIG/index.htm

César, M. (2009). Listening to different voices: Collaborative work in multicultural maths classes. In M. César, e K. Kumpulainen (Eds.), *Social interactions in multicultural settings* (pp. 203-233). Rotterdam: Sense.

César, M., e Ainscow, M. (Eds.) (2006). *European Journal of Psychology of Education, XXI*(3).

Clandinin, D. J., e Connelly, F. M. (1998). Personal experience methods. In N. K. Denzin, e Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (pp. 150-178). Thousand Oaks, Sage.

Denzin, N. (2002). The interpretative process. In A. Haberman, e M. Mieles (Eds.), *The qualitative researchers companion* (pp. 349-366). Thousand Oaks: Sage.

Hamido, G., e César, M. (2009). Surviving within complexity: A meta-systemic approach to research on social interactions in formal educational scenarios. In K. Kumpulainen, C. Hmelo-Silver, e M. César (Eds.), *Investigating classroom interaction: Methodologies in action* (pp. 229-262). Roterdão: Sense.

Lave, J., e Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Rand Falmer.

Ministério da Educação (ME) (2008). Decreto-Lei nº 3/08, de 7 de Janeiro, Diário da República – I Série, N.º 4. Lisboa: INCM.

Monteiro, V. (2003). *Leitura a par: Efeitos de um programa tutorial no desempenho em leitura, motivação, auto-conceito de alunos do 2º e 4º ano de escolaridade*. Lisboa: DEFCUL [Tese de doutoramento].

Ochaíta, E. (1993). Ceguera y desarrollo psicologico. In A. Rosa, e E. Ochaíta (Eds.), *Psicología de la ceguera* (pp. 111-202). Madrid: Alianza Editorial.

Oliveira, I. (2006). *Uma alternativa curricular no 2º ciclo do ensino básico: Vivências e reflexões*. Lisboa: DEFCUL [Tese de doutoramento].

Ponte, J. P., Matos, J. M., e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Rodrigues, D. (Ed.) (2003). *Perspectivas sobre a inclusão: Da educação à sociedade*. Porto: Porto Editora.

Santos, N. (2008). *Ver a matemática com pontos: Um estudo de caso de um aluno cego do 12.º ano de escolaridade*. Lisboa: DEFCUL. [Dissertação de mestrado.

Santos, N., e César, M. (2007). Eu não vejo como tu... mas podemos falar de matemática. In E. C. Martins (Ed.), *Cenários de educação/formação: Novos espaços, culturas e saberes*. Castelo Branco: SPCE. [CdRom]

Santos, N., Ventura, C., e César, M. (2008). Alunos cegos na aula de matemática. In APM (Ed.), Actas do ProfMat 2008. Elvas: APM. [CdRom]

UNESCO (1994). Declaração de Salamanca e enquadramento da acção na área das necessidades educativas especiais. Lisboa: UNESCO.

Vygotsky, L. (1934/1962). *Thought and language*.Cambridge MA: MIT Press.

Gesto, janela para exteriorizar o pensamento visual-espacial

Conceição Costa
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra

RESUMO

Este artigo pretende relatar e interpretar gestos surpreendidos num par de alunos quando interagem e se apoiam mutuamente na resolução de uma situação problemática em aula de matemática. Este par de alunos do 4º ano do 1º ciclo do Ensino Básico usa estes gestos, simultaneamente com outras modalidades de expressão (fala e manipulações em ambiente tecnológico--micromundo) para exteriorizarem o seu pensamento visual-espacial. Identificamos um entrelaçamento complexo entre gestos, fala e produções resultantes de acções sobre o micromundo, coisas que, por vezes, desencadearam execuções mentais complexas. Os gestos revelaram ter também uma função comunicativa, permitindo aos alunos exteriorizarem, de uma forma não verbal, o seu pensar visual-espacial.

Os três episódios que aqui apresentamos, e onde os referidos gestos foram observados, são extraídos de uma investigação que pretendeu elaborar, explorar e refinar um modelo teórico para o pensamento visual-espacial e um de cujos objectivos era identificar processos de pensamento associados aos modos de pensamento visual-espacial que os alunos utilizam na execução de tarefas geométricas, com ênfase especial nos mecanismos conceptuais, metáforas e gestos. Aquela investigação foi desenvolvida em três fases. Primeiro, foi desenvolvido um modelo inicial para o pensamento visual-espacial condensando o relevante na literatura existente; este modelo inicial foi depois confrontado com dados de um estudo empírico; após o que o modelo inicial foi refinado. A metodologia para o estudo empírico foi qualitativa, integrando registos vídeos de respostas individuais a tarefas executadas em actividades de sala de aula. Analisaram-se estes registos, e usou-se uma abordagem metodológica próxima da do método de comparação constante para refinar o modelo inicial. Foi então elaborada uma versão refinada do modelo, e avaliada segundo critérios de Schoenfeld (2002).

Neste artigo faz-se ainda uma rápida revisão de literatura sobre os gestos.

A investigação em educação matemática tem ultimamente posto ênfase na importância do corpo (e particularmente, nas actividades perceptuo-motoras) no processo de ensino-aprendizagem da matemática (Lakoff e Nunez, 2000).

A pesquisa passou ainda a incluir o gesto e o movimento do corpo ou como fontes potenciais de informação sobre como nós pensamos em matemática ou como contribuintes para o pensamento matemático e para a comunicação (Nunez, 2006; Radford, 2003).

A investigação do gesto em matemática tem lugar num modelo teórico que vê a cognição como um fenómeno corpóreo e que examina como é que as restrições evolucionárias e a experiencia corporal individual poderiam fornecer bases para as distintas maneiras como os humanos pensam, actuam e falam em matemática (Lakoff e Nunez, 2000).

A atenção ao corpo, dizem Sfard e Mcclain (citados em Arzarello e Edwards, 2005) não nega o facto de que a matemática e outras formas de conhecimento humano são inseparáveis de ferramentas simbólicas, e de que é impossível fornecer conhecimento afastado de factores históricos, culturais e sociais. Quando a matemática é vista como um produto humano socialmente construído e corpóreo, o gesto não seria um epifenómeno para a cognição, nem irrelevante para a comunicação. Em vez disso, o gesto constitui uma modalidade particular de cognição corpórea e, juntamente com a fala, inscrições escritas (por exemplo fórmulas), desenhos e gráficos, pode servir como uma janela sobre como se pensa e fala em matemática (Edwards, 2009). Radford (2009) argumenta que o pensamento não é algo estritamente mental, e advoga uma concepção sensitiva do pensamento na qual os gestos e os movimentos do corpo não são efémeros sintomas anunciando a chegada iminente do pensamento abstracto, mas constituintes *genuínos* deste. As possibilidades cognitivas dos gestos só poderiam ser compreendidas num contexto mais largo, de interacção entre os vários aspectos sensitivos da cognição; como quando eles se desenrolam no ambiente de sala de aula de matemática. Mais especificadamente, gestos e acções do corpo podem estar relacionadas com tentativas de, através dos sentidos das pessoas *objectivar*, dar significados palpáveis a entidades matemáticas de corporalidade diáfana.

A aprendizagem da matemática está intrinsecamente relacionada com a comunicação; e esta conduz a lidar com exteriorizações também não verbais, que incluem os gestos. O que é que os estudos sobre gestos têm trazido para a educação matemática? Serão os gestos cruciais para a matemática ou pelo menos para alguns aspectos de educação matemática? Que discussões conceptuais e teóricas sobre os gestos? Que contextos de educação matemática para ilustrar e firmar tais argumentações? Que possíveis efeitos negativos de se usarem os gestos enquanto se aprende matemática? Como é que os gestos se relacionam com as tecnologias usadas numa actividade matemática? Que espécie de estratégias de comunicação usa um professor nos seus diálogos para resolver tarefas que envolvam conversão de diferentes representações semióticas? Os gestos e o pensamento visual-espacial? Pretenderemos abordar neste artigo alguns dos aspectos acima identificados, em busca de clarificação; já que poderão ser pedra angular de outros trabalhos de pesquisa.

LITERATURA RELACIONADA COM GESTOS

O mesmo termo “gesto” é usado em relação a uma grande variedade de movimentos, mas vamo-nos referir só aos movimentos espontâneos das mãos e dos braços.

Apesar de um significativo e crescente interesse contemporâneo pelos gestos, muitos problemas a eles referentes permanecem por resolver. Por exemplo, o exacto papel dos gestos na cognição e as diferenças em perspectiva sobre isso, têm muito a ver com as concepções teóricas sobre o pensamento Radford (2009).

Em 2001, dizia Roth (2001) que duas teorias dominavam a literatura científica sobre a natureza e a função dos gestos da mão que acompanham a fala:

Uma dessas teorias, a de Butterworth e Hadar, sugere que os gestos não comunicam nenhuma informação semântica para além das expressões linguísticas que os acompanham. Os gestos seriam epifenómenos de expressões que surgem por si de modelos semânticos pré-existentes que estão na base da fala. Os gestos, segundo esta teoria, podem ter uma ou mais dentre quatro funções distintas: podem actuar como um sinal de proibição de interrupção indicando que o orador ainda não acabou; podem aumentar o potencial de activação neuronal, ajudando a mover o potencial de uma palavra, quando a activação para a palavra é baixa e demasiado vagarosa; podem facilitar a procura da palavra, explorando um caminho diferente para o léxico fonológico; podem “escapar-se” apesar de as palavras seleccionadas correspondentes terem sido censuradas e suprimidas por alguma razão antes de terem sido expressas.

A segunda teoria, de McNeill (citado em Roth, 2001), inspirada na linguística e na psicologia, é baseada na hipótese que os gestos e a fala partilham o mesmo “modelo semântico" e por isso são parte da mesma estrutura psicológica. Porque a fala e o gesto são impelidos pelo mesmo modelo semântico, eles constituem modalidades alternativas para expressar o significado. Avenidas alternativas são particularmente importantes quando há falhas no léxico do orador ou quando os gestos são melhores para expressar características espaciais porque são uma modalidade expressiva mais apropriada. McNeill (citado em Arzarello et al., 2009) observa que a fala e o gesto são elementos de um processo único integrado de formação de expressão, no qual há uma síntese de modos opostos de pensamento - imagética global sintética e instantânea com verbalização temporalmente estendida em segmentação linear.

Até agora os estudos empíricos não têm sido capazes de eliminar uma teoria em favor da outra. Por um lado, alguns relatórios da pesquisa registam atrasos de mais de 3.75 segundos entre os gestos e as correspondentes palavras, desafiando assim a sincronia gesto-fala que está subjacente na teoria de McNeill (Roth, 2001). Ainda Radford, Edwards, e Arzarello (2009) apontam que se falarmos de gráficos, geometria ou da visualização de entidades mais abstractas, há muitas ideias dentro da matemática que exigem tanto imagética como linguagem analítica para sua completa compreensão.

Por outro lado, a facilitação de acesso lexical que forma o âmago do modelo de Butterworth e Hadar também tem sido posta em dúvida com os seguintes fundamentos. Primeiro, não há nenhum decréscimo significativo na frequência dos gestos quando aos indivíduos lhes é pedido que contem uma história mais que seis vezes. Segundo, os indivíduos cujos gestos foram inibidos relembraram mais palavras de baixa frequência, resultado que é inconsistente com a teoria da facilitação lexical. Ambos os resultados minam a teoria de Butterworth e Hadar a qual prediz um decréscimo na frequência dos gestos, porque palavras não familiares se tinham tornado familiares, e na ocorrência de palavras de baixa frequência, porque o efeito facilitador de gestos estava inibido (Roth, 2001).

Duas outras teorias alternativas foram entretanto propostas:

A primeira, de Kita (citada em Roth, 2001) reconhece que o gesto tem um papel essencial não só no processo de falar, mas também no de pensar; e afirma que os gestos estão envolvidos no planeamento conceptual da mensagem a ser verbalizada, de tal forma que ajudam o orador a empacotar a informação espacial em unidades apropriadas para a fala. A segunda teoria, de Roth e Lawless, (citada em Roth, 2001) acaba com a noção de modelo semântico em situações onde os indivíduos não estão familiarizados com o contexto, apontando que em vez disso o modelo semântico é o resultado de interacções verbais e gestuais do aluno com o mundo material e social.

Arzarello, Paola, Robutti, e Sabena (2009) advogam que os seus trabalhos alargam a pretensão de McNeil de que gesto e expressões faladas são diferentes lados de um único processo mental subjacente. De facto, segundo eles, a natureza unitária dos processos, que se desenrolam dentro do feixe semiótico (estrutura dinâmica de signos e suas relações) mostra que subjacente aos processos mentais existe um sistema mais rico e mais complexo.

Radford (2009), afasta-se da ideia da concepção do pensamento como algo intrinsecamente mental que facilmente conduz a pensar dos gestos como "janelas" sobre os pensamentos internos ou portadores de ideias que já estão algures na mente, esperando pelo material próprio, expressão verbal. Advoga um ponto de partida diferente: a concepção do pensamento como "material ou "textual" . "A própria textura de pensamento não pode ser reduzida à de ideias mentais impalpáveis; é também feita de fala e das nossas acções reais com objectos e de todos os tipos de signos. Então o pensar não ocorre somente *na* cabeça mas *na* e *através* da linguagem, corpo e ferramentas. Como resultado e desta perspectiva, gestos como um tipo de movimento do corpo, não são considerados como uma espécie de janela que ilumina os acontecimentos que ocorrem numa "caixa preta" - nem são deixas para interpretar estados mentais. Eles são antes *constituintes genuínos* do pensamento"(p.113). A concepção sensorial do pensamento advogada por Radford sugere que o conhecer só pode ser garantido através de uma experiência multi-sensorial do mundo e uma espécie de apreensão autosensorial das coisas e de nós. Nesta perspectiva, os gestos podem ser considerados como uma parte das tentativas sensitivas dos indivíduos -- o modo táctil -- o que é evidenciado durante os esforços para apreender conceptualmente alguma coisa.

Os investigadores têm desenvolvido diferentes taxonomias de gestos e as suas classificações baseiam-se nas funções particulares dos gestos ou nos modelos de produção de gestos. Por exemplo, McNeill (citado em Radford, Edwards, e Arzarello, 2009) desenvolveu as seguintes categorias de gestos segundo dimensões não exclusivas, todas as quais desempenham papeis essenciais na comunicação e no pensamento sobre matemática: gestos *deiéticos* (o apontar de objectos concretos ou virtuais); gestos *icónicos* (cuja forma está directamente relacionada com o conteúdo semântico da fala); gestos *metafóricos* (dão corpo a uma abstracção); gestos *de ênfase temporal* (gestos simples repetidos usados para ênfase) e gestos *que modulam interactividade social*. Contudo a natureza da matemática como uma disciplina, pode exigir uma categoria de gestos mais refinada. Isto é assim, porque enquanto na vida do dia a dia, os objectos concretos não se referem a nada para além de eles próprios, no ensino matemático, muitos objectos concretos têm sido designados para representar objectos matemáticos abstractos. Além disso, fora das matemáticas, os símbolos escritos não são usualmente manipulados como se fossem objectos. Então, descrições e análises dos gestos em matemática deveriam ter em conta estas características do discurso e da pratica matemática. Por exemplo, examinar os gestos de pessoas que dominam a matemática que descrevem, para pessoas que aprendem matemática, para pessoas que ensinam matemática, para pessoas que usam matemática em modelação e resolução de problemas; e, ainda mais importante, variar o tipo de matemática envolvida, incluindo matemática centrada na generalização, versus matemática centrada na visualização e na computação (Edwards, 2005).

Gestos vistos dentro da comunicação

Os gestos são fulcrais para a cognição humana e entre culturas eles constituem elemento essencial da comunicação humana. Gestos podem ser olhados como instrumentos de mediação que ligam o social e o psicológico (Vygotsky, 1978). Há provas que o gesto está profundamente integrado com capacidades cognitivas. Esta integração começa cedo e desenvolve-se durante a infância. A presença de artefactos visuais e a disponibilidade de gestos capacitam os estudantes a comunicar mesmo antes da sua iniciação ao discurso apropriado do domínio com que estão a lidar. Os gestos são particularmente bons para capturar o visual e as características imagéticas de uma ideia (Goldin-Meadow, Kim, e Singer, 1999).

Para Roth (2001), gestos e representações visuais capacitam o estudante a comunicar duma forma que o colega compreende. Quando os estudantes conversam na presença de objectos materiais estes fornecem uma base fenomenológica relativamente à qual eles podem executar gestos metafóricos que dão corpo a entidades conceptuais e abstractas. Há então alguma prova de que os gestos ajudam os estudantes a coordenar as suas interacções, mas não tem sido mostrado como os gestos, a coordenação e a interacção estão relacionados com o tipo de conhecimentos que os estudantes desenvolvem.

David McNeil (citado em Sfard, 2009) vê o pensamento humano como uma dialéctica complexa entre a fala e a imagética em que a imagética em questão é incorporada em gestos que universal e automaticamente ocorrem com a fala. Edward (2005) aponta que gesto pode ser visto como uma ponte importante entre imagética e fala, uma ligação que junta acção, imagética, memória, fala no caso de resolução de problema matemático. David Armstrong (citado em Sfard, 2009) sustenta que a formação de conceitos é evolucionária e está anatomicamente ligada à percepção a qual por si depende dos movimentos de um organismo e de gestos.

Sfard (2009) aponta uma certa unanimidade entre investigadores na crença que existe uma relação intima, na verdade uma simbiose, entre gestos e linguagem falada; contudo diz que temos mais do que uma razão para afirmar que *falar* e *gesticular* não são parceiros equivalentes no negócio de pensar e comunicar e convida a uma reflexão mais profunda sobre as relativas contribuições *(o quê* e *como*) daquelas duas modalidades para a cognição e comunicação matemática. Gestos, encarados do ponto de vista da sua função comunicacional, são também uma parte dos processos de pensamento. Emissões vocais e gestos são blocos de construção do processo que abarca tanto a comunicação como o pensamento. Sfard encara aqui *linguagem* como uma ferramenta para comunicar, *gesto* como acção de comunicação real e *emissões vocais* como acto executado como emissão de uma série de sons. Gestos são cruciais para a eficácia da comunicação matemática presencial. Os gestos são meios inestimáveis para assegurar que todos os interlocutores "falam sobre o mesmo objecto matemático".

Um outro aspecto importante da análise do gesto diz respeito à relação entre o conteúdo da fala e do gesto. Foi identificada a *concordância gesto-fala*, quando um gesto expressa a mesma informação transmitida pela expressão verbal e *discordância gesto-fala* quando um gesto contém informação não expressa na frase proferida (Goldin-Meadow, 2000). Kita (citada em Sabena, 2004) sustenta que a discordância gesto-fala aparece porque o pensamento espacial-motor explora disposições de informação que o pensamento analítico ainda não está pronto para atingir. O pensamento espacial-motor e o espaço analítico constituem ainda dois modos diferentes e contudo complementares de pensamento: o primeiro organiza a informação com esquemas de acção e a modulação deles, de acordo com as características do ambiente, enquanto que o último organiza a informação estruturando hierarquicamente padrões conceptuais descontextualizados. As informações diferentes transmitidas pela fala e pelo gesto, discordância gesto-fala, não são necessariamente incompatíveis, mas possivelmente complementares e isso pode denunciar prontidão para aprender ou para atingir um novo estádio de desenvolvimento. De acordo com Goldin-Meadow (citado em Arzarello e Edwards, 2005) esta discordância está associada com a propensão para aprender; parece ser uma alpondra no caminho do domínio (mestria) de uma tarefa; e pode pôr lado a lado duas diferentes estratégias para resolver um problema dentro de uma única expressão enfatizando o facto que são possíveis diferentes abordagens ao problema. Radford (2003) e Edwards (2009) reforçam a ideia que o gesto e a fala podem "empacotar" formas complementares de informação e podem ser utilizadas pelo orador para apoiar o seu pensamento na resolução de problemas. Edwards sustenta que gestos espontâneos produzidos em conjunção com a fala é tanto uma fonte de dados sobre o pensamento matemático como um modalidade integral em comunicação e cognição.

Gestos vistos dentro da semiótica

Gestos são também significantes do lado da semiótica, se vistos como signos ou marcas. Vygotsky (citado em Arzarello, Ferrara, Robutti, e Sabena, 2005) apontou que "o gesto é especificamente um signo visual inicial no qual a futura escrita da criança está contida, como o futuro carvalho está contido na semente. O gesto é uma escrita no ar e o signo escrito é muito frequentemente simplesmente um gesto fixo".

Para Duval (2006), os objectos matemáticos nunca estão acessíveis por percepção ou por instrumentos (microscópios, telescópios, instrumentos de medida). A única maneira de ter acesso e lidar com eles é usar signos e representações semióticas. Uma representação semiótica é produzida com sinais e regras de uso que suportam um carácter intencional. As representações não semióticas não têm este carácter intencional. Elas podem ser produzidas por um sistema físico ou orgânico, como no caso de uma pegada na areia. Qualquer aluno debate-se com duas exigências opostas para se meter no pensamento matemático: para realizar qualquer actividade matemática, devem ser usadas necessariamente representações semióticas, mesmo se há escolha do tipo de representação semiótica; os objectos matemáticos nunca devem ser confundidos com as representações semióticas usadas. Alguns sistemas semióticos podem ser usados só para uma função cognitiva: processamento matemático. Por outro lado, outros sistemas semióticos podem preencher uma larga gama de funções cognitivas: comunicação, processamento de informação, consciência, imaginação. Relativamente à propriedade de representação semiótica que é básica para a actividade matemática, podemos distinguir diferentes tipos de sistemas semióticos, que chamaremos *registos* de representação semiótica. Nem todos os sistemas semióticos são registos, só aqueles que permitem uma transformação de representações. Há dois tipos de transformação de representações semiótica que são radicalmente diferentes: tratamentos e conversões. *Tratamentos* são transformações de representações que acontece dentro do mesmo registo. Conversões são transformações de representação que consiste em mudar um registo sem mudar os objectos que estão a ser mostrados.

No estudo dos gestos como sinais, não se podem esquecer os seus aspectos culturais e corpóreos (Arzarello, Ferrara, Robutti, e Sabena, 2005). Radford (2003) tem seguido em educação matemática, o ponto de vista de uma semiótica cultural, advogando a teoria de *objectivação do conhecimento,* introduzindo os chamado*s meios semióticos de objectivação* "estes objectos, ferramentas, dispositivos linguísticos, e sinais que os indivíduos usam intencionalmente em processos sociais de transmitir significados, para atingir uma forma estável de consciência, para tornar visíveis as suas intenções, e para levar a cabo as suas acções destinadas a atingir o objectivo das suas actividades" (p. 41) e *processos de objectivação*. O termo *objectivação* na sua etimologia está relacionado com aquelas acções que apontam ou lançam alguma coisa em frente de alguém ou tornam alguma coisa visível à vista. Os gestos são parte daqueles meios semióticos de objectivação que permitem aos estudantes objectivar conhecimento - isto é, ter conhecimento de aspectos conceptuais que, devido à sua própria generalidade, não podem ser indicados no domínio (reino) do concreto (Radford, 2003). Por *processos de objectivação,* Radford (2009) quer significar processos sociais criativos e activos no decorrer dos quais os estudantes chegam a dominar, através da prática, formas matemáticas culturais de reflexão e de acção, enquanto atingem ao mesmo tempo o desenvolvimento de estratos cada vez mais profundos de subjectividade e de consciencialização. A uma tentativa de teorizar a interacção dos sistemas semióticos na experiência matemática dos estudantes para objectivação do conhecimento, foi dado o nome de *nodo semiótico* (constructo). Gestos e acções corpóreas são tentativas de tornar palpáveis a corporalidade diáfana dos significados matemáticos. A análise temporal dos nodos simióticos aponta para que à medida que a objectivação progride a configuração dos sistemas semióticos muda. Há de facto uma troca na configuração dos meios semióticos de objectivação: as acções tornam-se mais pequenas e gestos e linguagem tornam-se mais relevantes.

Ainda segundo Radford (2005), os gestos ajudam os estudantes a tornarem evidentes as suas intenções, a identificar relações matemáticas abstractas e a ter conhecimento dos aspectos conceptuais dos objectos matemáticos. Contudo, considerados em isolado, os gestos têm, falando de uma forma genérica, um alcance de objectivação limitado. A razão que está por de trás da fraca compreensão da interacção dos estudantes, resulta de se isolar um ou mais sistemas semióticos presentes na aprendizagem, já que a que objectivação do conhecimento é uma actividade mediada multi-semiótica. Revela-se numa interacção dialéctica combinada dos diversos sistemas semióticos. Cada sistema semiótico tem um leque de possibilidades e limitações para expressar significado. A conceptualidade dos objectos matemáticos não pode ficar reduzida a só um dos sistemas semióticos, nem mesmo no decorrer da aprendizagem; porque o significado matemático é forjado aquando da interacção dos diversos sistemas semióticos.

Os gestos têm também sido analisados como recursos semióticos usados pelos estudantes e professores duma forma multimodal, no ensino-aprendizagem da matemática (Arzarello, Paola, Robutti, e Sabena, 2009). Dentro desta estrutura, o papel dos gestos é importante não só quando se relaciona com as palavras mas também com as outras modalidades (acção sobre a tecnologia, sinais escritos, etc) . Gestos, olhadelas, desenhos e modos extra-linguísticos de expressão são vistos na sala de aula como componentes básicas de actividades semióticas, como definidas por Duval (2006): produção de representação dentro de um registo semiótico; transformação de representações semióticas dentro do mesmo registo; conversão de uma representação semiótica de um registo para outro. Para encaixar todos aqueles fenómenos dentro de uma perspectiva semiótica é necessário alargar a gama de signos que são considerados relevantes no processo de ensino aprendizagem, o que foi feito na última década por vários pesquisadores (Arzarello e Edwards, 2005; Roth, 2001). Dentro desta tendência, Arzarello, Paola, Robutti, e Sabena (2009) usaram uma noção alargada de sistema semiótico, *feixe semiótico*, que inclui todos os signos produzidos por acções que têm um carácter intencional (por exemplo, falar, escrever, desenhar, gesticular, manejar um artefacto, etc...) e cujos modos de produção e transformação (por exemplo para gesticular ou desenhar) pode envolver também outras abordagens menos deterministas e mais idiossincráticas que os algoritmos. Um feixe semiótico é uma estrutura dinâmica onde tais diferentes fontes coexistem e desenvolvem as suas relações mútuas, de acordo com o paradigma multimodal. Um exemplo de feixe semiótico é representado pela unidade fala-gesto. Tem sido escrito que "gesto e linguagem são um único sistema" McNeill (citado em Arzarello, Paola, Robutti, e Sabena 2009). Gesto e linguagem constituem um feixe semiótico, feito de dois conjuntos semióticos que se entrelaçam profundamente (Maschietto e Bussi, 2009). Dentro destas lentes semióticas (feixes semióticos) foi estruturado e descrito um fenómeno semiótico importante, denominado *jogos semióticos* e remetido ao professor. São estratégias de comunicação típicas entre sujeitos, que partilham as mesmas fontes semióticas numa situação específica. A pratica de jogos semióticos está enraizada na profissão de professor, e a maior parte das vezes é continuada inconscientemente por ele. Uma vez explícita pode ser usada para conceber de forma apropriada as estratégias de intervenção do professor na sala de aula para apoiar os processos de interiorização dos estudantes (Arzarello e Paola, 2007).

GESTOS OBSERVADOS NO DESENROLAR DE UM ESTUDO NO QUAL SE PRETENDEU EXAMINAR O PENSAMENTO VISUAL-ESPACIAL

Metodologia subjacente

Muitos investigadores têm dado ênfase ao valor da visualização e do raciocínio visual na aprendizagem da matemática (Bishop, 1989; Presmeg, 1989; Zimmerman e Cunningham, 1991). Na literatura encontramos termos como visualização, pensamento visual, raciocínio visual, raciocínio espacial, pensamento espacial para nomear actos mentais a combinar o visual, o espacial e pensamento visual-espacial. O pensamento visual aparece muitas vezes a par do termo visualização (Hershkowitz, Parzysz e Dormolen, 1996) e o próprio termo "visualização" tem diferentes conotações consoante esteja ligado à educação matemática, à investigação científica ou à psicologia. Os termos pensamento espacial ou raciocínio espacial surgem com frequência ligados a capacidades espaciais (Clausen-May e Smith, 1998). O pensamento visual-espacial está na base de criações significativas da mente humana, é fulcral para a educação em geometria a todos os níveis e, da literatura lida, induzimos que conceitos, operações e processos mentais ou capacidades espaciais envolvidos nesse mesmo pensamento ainda permanecem sob uma certa obscuridade. Sentimos a necessidade de olhar e procurar compreender o pensamento visual-espacial, procurando conhecer como ele se pode desenvolver e tentando ao mesmo tempo explicar dificuldades encontradas no pensamento visual-espacial usado pelos alunos.

Foi concebido um estudo para elaborar, explorar e refinar um modelo teórico para o pensamento visual-espacial, bem como para desenvolver, isto é, conceber, implementar e avaliar dois modelos didácticos para o desenvolvimento do pensamento visual-espacial. Aquela investigação foi desenvolvida em 3 fases. Primeiro, foi desenvolvido um modelo inicial para o pensamento visual-espacial condensado de literatura relevante; depois o modelo inicial foi confrontado com dados de um estudo empírico; finalmente o modelo inicial foi refinado. A investigação empírica que coexistiu com a construção teórica do modelo focou -se em dois ambientes de ensino para o desenvolvimento do pensamento visual-espacial, no contexto da exploração e compreensão das isometrias (translação, reflexão e rotação), usando os movimentos rígidos (deslizar, virar e rodar) por alunos do 4º ano do 1º ciclo do Ensino Básico de duas escolas públicas da cidade de Coimbra. Os ambientes de ensino incidiam sobre o mesmo tópico, só que num deles as tarefas atribuídas aos alunos, na aula, envolviam apenas actividades com material manipulável (não tecnológico) e no outro ambiente de ensino eram atribuídas tarefas mistas, no sentido que os alunos podiam estar envolvidos, na aula, em actividades com computador (micromundo Tarta, especialmente concebido para o estudo) e em actividades com material manipulável (não tecnológico). O micromundo Tarta pretende semear e explorar ideias tais como translação, reflexão e rotação, através dos movimentos rígidos deslizar, virar e rodar. As sessões nos ambientes de ensino foram construídas de forma que as respectivas actividades reflectissem também tanto quanto possível, a sequência das fases de progresso e aprendizagem de Van Hiele: informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração. Foram ainda determinados os níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares manifestados pelos doze alunos do estudo antes e depois da experimentação dos ambientes de ensino, e analisadas possíveis alterações, nesses níveis, após aquelas intervenções didácticas. Servimo-nos para isso das respostas individuais dos alunos do estudo a tarefas geométricas e da extensão do modelo de Van Hiele para movimentos geométricos na escola elementar, desenvolvida por Clements e Battista (Johnson-Gentile, 1990). Foi também usada uma codificação relativa aos descritores de níveis de pensamento para movimentos, baseada na codificação de Lewellen (1992).

A metodologia da investigação é de natureza qualitativa integrando a análise e interpretação de transcrições de registos vídeos das respostas individuais de doze alunos a tarefas geométricas antes e depois do ambiente de ensino onde foram revelados e caracterizados empiricamente modos de pensamento visual-espacial e processos de pensamento associados a esses modos. Também com o mesmo fim, foram analisadas e interpretadas as transcrições de registos vídeos das execuções de duas tarefas geométricas executadas, em actividade de aula, por dois pares de alunos que trabalhando em díade, usaram o micromundo Tarta. Pretendia-se assim validar o modelo teórico inicial para o pensamento visual-espacial. A influência da dimensão sócio-cultural nos modos de pensamento visual-espacial foi também procurada, examinando e analisando transcrições de registos vídeos relativas às execuções das tarefas geométricas. Os dados foram organizados em episódios, os quais foram distribuídos por categorias de classificação. Depois os episódios foram descritos, analisados e interpretados no sentido de estruturar o modelo teório elaborado com uma abordagem metodológica próxima da do método de comparação constante identificado por Glaser (citado em Bogdan e Biklen, 1994). Uma versão refinada do modelo de pensamento visual-espacial foi então elaborada e avaliada segundo os critérios da Alan Schoenfeld.

Contexto

Os excertos que vão ser mostrados, provêem do estudo, acima mencionado (Costa, 2006) que integrou a construção dum modelo teórico para a compreensão do pensamento visual-espacial onde foram identificados quatro modos de pensamento: modo resultante da percepção, modo resultante da manipulação mental de imagens, modo resultante da construção mental de relações entre imagens e modo resultante da exteriorização do pensamento. No compreender do desenvolvimento do pensamento visual-espacial dos alunos, foi exemplificado como aqueles modos de pensamento visual-espacial foram socio-culturalmente vividos, especificadamente as suas relações com a zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky (ZDP) de cada aluno; e identificados processos de pensamento associados aos modos de pensamento visual-espacial que os alunos utilizaram na execução de tarefas geométricas, com ênfase especial nos mecanismos conceptuais metáforas e gestos.

Os alunos usaram gestos, para comunicar a sua dinâmica mental. Na ausência do vocabulário apropriado à geometria das transformações os alunos expressaram a sua dinâmica mental usando gestos que eram consistentes com a manipulação mental. Contudo esses gestos não eram consistentes com a fala. Durante as actividades da sala de aula quando o micromundo Tarta (especialmente concebido para o estudo) estava a ser usado, gestos deiéticos e icónicos precederam o vocabulário relacionado com as transformações geométricas ou com o uso do micromundo Tarta, como se de suportes da dinâmica mental se tratasse. À medida que os alunos se iam familiarizando com o vocabulário específico, os seus gestos começaram a coincidir com a fala e por fim até os gestos quase desapareceram, ficando quase só gestos deiéticos. Depois para a descrição da dinâmica mental só o vocabulário do domínio específico era usado ou melhor a descrição começava a ser analítica se bem que por vezes ainda incompleta.

O modo resultante da exteriorização do pensamento, identificado no estudo acima citado, é um espaço cognitivo de acção, representação, construção e comunicação; e pode integrar num todo componentes tais como o corpo, o mundo físico e a cultura. É ele que nos permite inferir a imagética e a dinâmica mental dos alunos e compreender obstáculos cognitivos que os alunos possam experimentar ao executar tarefas matemáticas. Não podemos directamente observar as representações internas de alguém, mas podemos antes fazer inferências sobre as representações internas baseadas em interacções, descrições verbais, gestos ou produção de representações externas. No estudo, o modo resultante da exteriorização do pensamento pode revelar as seguintes funções dos gestos: ferramenta para pensar; ferramenta para medir; comunicar através de gestos icónicos e deiéticos; auxiliar psicológico do aluno; gesto egocêntrico; contribuir para a construção social. Aquele modo resultante da exteriorização do pensamento ilustrou uma metáfora (metáfora do movimento) através do gesto dum aluno.

Episódios

Os três episódios reportam-se a parte do trabalho da díade (Abel e Delfim) na aula, quando resolvem a tarefa *flor*, que consiste em usar o micromundo Tarta para construir a seguinte figura

Os modos de pensamento visual-espacial dos alunos foram influenciados pela interacção mútua entre os próprios alunos, que na aula executaram com sucesso a tarefa usando o micromundo Tarta, sem apoio de ninguém. O pensamento visual-espacial que ocorreu nas mentes daqueles alunos foi socialmente vivido, acompanhado de gestos. Os modos de pensamento visual-espacial dos dois alunos nem sempre foram simultaneamente os mesmos. As interacções entre o Abel e o Delfim fizeram com que vivessem os vários modos de pensamento visual-espacial, o que provavelmente não fariam, se cada um trabalhasse sozinho. Nesta tarefa, cada aluno e o micromundo Tarta foram pelo menos uma vez interventores do pensamento visual-espacial do outro aluno, actuando na respectiva ZDP e fazendo com que este outro aluno se envolvesse no modo de pensamento resultante da manipulação mental de imagens (Quadro 1).

Episódio 1

Delfim chamou o Tarta, para isso teclou *t*, e no ecrã apareceu o triângulo T1.

1 Abel: *Vai bem. Espera, espera.* (O Abel olha para o Tarta do ecrã, pega na folha da tarefa e depois de ter olhado para ela, diz)

2 Abel: *Estes Tartas não têm...*

3 Abel: Ó *professora estes Tartas* ... (Começou a chamar apontava um triângulo, não se percebe. Aparece o informático, os dois alunos falam para ele inaudível. O informático coloca a folha da tarefa junto do ecrã para que os alunos possam comparar melhor as imagens e não diz nada).

4 Delfim: *Ai é assim?*

5 Abel: *Aqui é o ponto...*

(Não se percebe o que eles dizem, ficam sozinhos a olhar um para o outro. Abel começa por arrastar o seu dedo sobre o ecrã para cima, põe as mãos na cabeça e com a mão direita sobre o ecrã, roda-a para a esquerda, indicando ao colega o movimento a que deveria ser submetido o Tarta e diz:)

6 Abel: *Vira isso.*

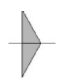
(Delfim começou a teclar mas relembrou os comandos e logo emendou o Abel, ameaçando de pancada com o dedo indicador da mão direita.)

7 Delfim: *Rodar*

(Delfim começou a teclar a palavra, entretanto Abel também parecia querer teclar mas Delfim afastou-lhe a mão e surgiu uma caixa de erro, pois não tinha sido indicado de quanto deveria ser rodado).
8 Delfim: *Não, é roda* (tecla *roda 90* seguido de *enter*, aparecendo no ecrã T2).

9 Delfim: *Olha agora é apa.* (Tecla *apa* para apagar a figura anterior, ficando no ecrã apenas a figura T3.

Abel mexe nas teclas para mudar o passo do Tarta, como se podia ver pelo aparecimento da caixa. Entretanto Delfim impede Abel de mexer nas teclas).
10 Inv.: *Se precisam de um Tarta, aqui está ele.* (A investigadora deixa ficar um triângulo de papel semelhante ao Tarta. Os dois alunos não ligam nenhuma e Delfim coloca o Tarta de papel ao lado do monitor, pois o sítio onde fora colocado incomodava-os).
11 Abel: *l*, *enter* e *vira* (Abel tecla *l*, escolhe dois pontos para construir uma linha, e depois disso, tecla *vira* e o Tarta foi virado em torno dessa linha, assim foi obtida no ecrã a figura T4.



Agora Abel pega na folha da tarefa, mostra-a a Delfim e os dois comparam a figura da folha da tarefa com a do ecrã. Abel indica com o dedo como deviam continuar a construir, para a direita:)
12 Abel: *Isto está para a primeira.*
13 Delfim: *Não, Não*. *Agora tem de se ...* (com um dedo da mão direita aponta no ecrã a figura e, assobiando aponta agora na direcção da sua esquerda, a oposta do colega. Continuam a discutir e Delfim simula virar com as mãos) *e depois vira com este.* Aponta para a figura T4 do ecrã).
14 Abel: *Não*. (Abel mexe no ecrã com a mão para a direita e alarga a mão no ecrã) *pode ficar aqui*.
15 Delfim: *Não.* (Aponta no ecrã com a mão a outra direcção para construir a figura).
16 Abel: (Abel diz qualquer coisa inaudível) *pois se deixarmos*... (mexendo com as mãos no ecrã).
(Delfim começa a teclar, carregando duas vezes em *enter*. A figura do ecrã T4 não se moveu.)
17 Abel: *dd*.
18 Delfim: *Ai ai e agora disparate* (põe a mão na cabeça).
(Abel começa a escrever no teclado *de* seguido de outra letra e aparece uma caixa de erros).
19 Delfim: *É apa.*

(Abel tecla *apa*, a figura não se modifica, cada aluno aponta no ecrã, como quer que a figura se mova, continuam a não se entender, aparece outra caixa de erros, resultante do Abel continuar a teclar.)
20 Delfim: *Ai, Não ... .Mas agora não fica bem.*
(Costa, 2006, pp. 247-248)

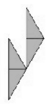
Os alunos tentam *reconhecer* a figura do ecrã como componente da figura *flor* e estabelecer relações entre aquela componente e a *flor*, abstracção ligada ao reconhecimento de uma estrutura espacial. Contudo surge um conflito devido ao modo diferente como os dois alunos interpretam a figura T4 embutida na *flor* (parágrafos 12 e 13). Os reconhecimentos das figuras são diferentes e diferentes seriam os caminhos a prosseguir para a construção da *flor*. Nos parágrafos seguintes (14-19) ambos estão convencidos de que estão certos e nenhum quer ouvir o outro. Prosseguem na teimosia e não param para falar sobre o que estão a pensar.

Os mecanismos conceptuais gestos e metáforas, que foram vividos tinham diferentes significados e funções. Abel usou um gesto *deiético* ao apontar para um triângulo para *comunicar* (partilhar) algo de estranho que notou, e chama pela professora (o gesto não é redundante com a fala, talvez se complementem). Depois Abel gesticulou novamente (descrição entre os parágrafos 6 e 7), gestos *icónicos* (semelhanças visuais com os movimentos), para representar os movimentos a que o Tarta deveria ser submetido. Abel ainda não estava bem familiarizado com o discurso apropriado ao contexto e usou (agarrou) o termo "vira isso" para descrever o movimento, que não coincidia com o gesto. O gesto representava uma imagem cinestésica. Delfim percebeu o que o Abel queria comunicar e como estava já mais familiarizado com o vocabulário do contexto, fez um gesto social, que talvez não o possa inserir na classificação dos gestos de McNeill (Roth, 2001) "ameaçando-o de pancada com o dedo indicador da mão direita", uma meio de o avisar que ele estava errado e disse *rodar* seguindo-lhe o teclar deste comando. Delfim não interpretou bem o que a caixa de erro lhes queria dizer e substituiu *rodar* por *roda* (daí se seguiu um caminho diferente para a execução da tarefa). Mais tarde (descrição depois do parágrafo 11) Abel usou então um gesto *icónico* para apontar o sentido da construção da *flor*, e a sua fala seguinte indicava qual era a parte da *flor* por onde se devia começar. Também Delfim usou vários gestos para convencer o Abel. Primeiro um gesto *deiético* a apontar com o dedo no ecrã a figura T4 (parágrafo 13). Um segundo gesto *icónico* foi observado quando assobiando apontava para a sua esquerda, queria mostrar o sentido da construção da *flor*. Delfim explicou o que deveria ser feito (na ausência de discurso apropriado) com um gesto "assobiando apontou na direcção da sua esquerda" que parece traduzir uma *metáfora do movimento* e evidenciar uma forma *transformacional* de pensar. Finalmente um terceiro gesto de Delfim, *gesto icónico* (usou uma imagem cinestésica) para simular um virar, verbalizando simultaneamente esse pensamento (gesto redundante com a fala). De seguida Abel fez um novo gesto *icónico* para representar o espaço que a *flor* iria ocupar (parágrafo 14). Mais dois gestos análogos aos anteriores, um para o Abel outro para o Delfim, podem ser verificados, evidenciando com isso falta de diálogo entre os dois alunos. Nesta perspectiva de análise, este episódio exemplifica o aparecer do modo de pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento, que traz associado aos seguintes processos de pensamento: descrição da dinâmica mental (verbalizações e *gestos*) e metáfora.

Episódio 2

50 Abel: pa, enter, l, virar enter.

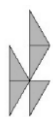
(Ficam os dois alunos a pensar um pouco, olhando para a figura do ecrã, falavam entre si, mas era indistinguível ... Abel muda o passo do Tarta, como se pode ver pelo aparecimento da caixa, tecla l, para mandar construir uma linha, com as setas de direcção escolhe os pontos por onde essa linha irá passar e manda virar, apareceu a nova construção no ecrã T14).



(Abel fica tão contente que bate as palmas e põe-se aos pulos a cantar. Delfim está muito calado, espantado com a alegria do colega e não muito crente no que via, e parecendo não perceber o pensamento do Abel. Este mexe com as mãos na cabeça e nos cabelos faz o movimento correcto com a mão no ecrã, para dar a indicação do movimento, direcção e sentido).

51 Abel: Desliza para baixo

(Sai para ir dar uma volta. Delfim então muda o passo para cm, fazendo aparecer a caixa de mudança do passo, faz o que colega lhe mandou, teclando db seguido de enter e surge-lhe a construção T15



e começa a gritar:)

52 Delfim: Estás a ver, está mal, está mal, Abel... Estás a ver, estás a ver...

53 Abel: (Chega-se ao pé do computador, pensa uns segundos) Não. Desliza para baixo. (Simultaneamente faz um gesto com a mão para baixo.)

(Delfim tecla o que o colega lhe mandou, db e apareceu uma nova construção T16.)

54 Abel: apa.

55 Delfim: apa (indicando com o dedo que estava a perceber). Agora sou eu que faço.

(Delfim fez a construção T17).

(Abel chama pela professora para lhe mostrar o que tinham feito enquanto Delfim continua a construir a flor, mudando o passo, para "passo 1", identificando recta em torno da qual iria virar o Tarta, e procurando os respectivos pontos para a recta de viragem ser traçada).

56 Delfim: Ora vira, vira, vira. (Delfim, cantarolando e fazendo gestos com a mão de contentamento, faz a construção T18.)

(Costa, 2006, pp. 249-250)

Delfim começou por fazer o que Abel lhe indicou (parágrafo 51); depois porque não tinha acompanhado a dinâmica mental do colega (agia como um ventríloquista) ou não concordava com essa dinâmica (nada dizendo) quando construiu T15, usando o micromundo Tarta e viu que a figura obtida não estava embutida na estrutura da flor, gritou pelo Abel (parágrafo 52). O micromundo fez com que o Delfim falasse desvendando o seu pensamento visual-espacial. Continuou a fazer o que Abel ditava sem se saber se percebia o que estava a fazer (descrição a seguir ao parágrafo 53). Delfim a partir de certa altura percebeu o raciocínio do colega e como continuar a tarefa, e partilhou isso por meio de um gesto deiético (parágrafo 55).

O Abel pareceu envolvido num modo de pensamento resultante da manipulação mental de imagens (parágrafos 50 e 51) onde estiveram presentes imagens dinâmicas e antecipadoras. Ele descreveu essa sua dinâmica mental verbalizando (parágrafo 51) em simultâneo com a representação de uma imagem cinestésica (gesto icónico, descrição entre os parágrafos 50 e 51). Abel veio examinar a figura construída por Delfim, e, ao fazê-lo, pareceu envolver-se num modo de pensamento resultante da construção de relações entre imagens. Repare-se Abel depois de pensar uns segundos (parágrafo 53) dá uma ordem ao colega com segurança. Talvez se possam deduzir daqui várias coisas. Uma é que o Abel ao dizer ao Delfim "Não. Desliza para baixo" integrando também o respectivo gesto icónico (parágrafo 53) se envolveu em actividades de construção de relações entre imagens, de raciocínio transformativo (gerando imagens antecipadoras), de planeamento mental da acção seguinte, de metacognição, sempre num processo onde imagens dinâmicas estiveram presentes com o fim de prever visualmente a construção de diferentes partes da *flor*. Uma outra análise pode ser a seguinte: Abel deu uma ordem ao Delfim (parágrafo 51) sem a ter planeado completamente ou talvez tivesse pensado que o Tarta activo era outro. Só depois de ser chamado pelo Delfim para examinar o que tinha acontecido é que foi avaliar as imagens construídas e estabelecer relações entre essas imagens. Quando Abel proferiu o segundo "deslizar para baixo" isso acarretou execuções mentais complexas (para ele Abel), resultantes de antecipações e de diferentes transformações O Abel também integrou esta dinâmica mental com um gesto icónico que envolvia por tal abstracções elaboradas a partir da acção (abstracção pseudo-empírica), isto é, baseadas nas relações percebidas no micromundo Tarta.

Episódio 3

63 Delfim: (Quando acaba de construir T20.) *Estás a ver como ia bem.*

(Agora trocaram os papéis e Delfim dizia o que Abel devia fazer e este teclava)

64 Delfim: *Nesta linha aqui* (aponta no ecrã a linha horizontal imaginada que passa no meio da figura *flor*) *viras. Não é?*

65 Abel: (Abana com a cabeça em sinal de concordância.) *Sim.*

(Abel fica sozinho a definir a linha em torno da qual o Tarta iria virar, entretanto acontece algo na sala que o fez levantar para verificar ... Depois, quando regressa ao lugar, manda *virar* e aparecer um triângulo na construção T21

que ele não tinha previsto, pois provavelmente tinha mentalmente trocado o Tarta que estava activo e grita:)

66 Abel: *Ah!!!* (Simultaneamente põe a mão na boca.)

67 Delfim: *O que é?*

(Abel tenta explicar o que aconteceu, usando também as mãos ..., não se percebe o que diz ... Em seguida desfaz e muda o passo de 1 e torna a fazer de novo T21 para se poder ver melhor. Quando acabou dá um grito de satisfação e deixa o Delfim a continuar a tarefa. Este continua o trabalho de Abel mexe um pouco, não faz nada de novo e começa a chamar o colega.)

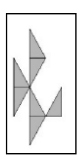
68 Delfim: *Abel. Abel. Linha?*

69 Abel: *Sim*

70 Delfim: *pa* (Muda o passo, *passo 1*, para poder definir os pontos da linha, e chama) *Abel.* (Escolhe os pontos, manda traçar a linha e, antes de teclar *vira*r chama novamente o Abel. Abel chega e Delfim mostra-lhe o "*passo 1*" apontando para a caixa do passo, entretanto aparece o Informático e ele pergunta-lhe algo... inaudível, Delfim tecla *vira* e aparece uma figura um pouco torta T22.)

(Costa, 2006, pp. 251-252)

Neste episódio Delfim e Abel, em colaboração, tinham construído usando o micromundo Tarta, parte da tarefa *flor*.



Os dois alunos viviam os mesmos modos de pensamento visual-espacial, construíram T20 e T21 de acordo com o seguinte esquema: um pensa como fazer as figuras e descreve e o outro usa o micromundo para a construção, depois trocam os papéis. O modo de pensamento resultante da manipulação mental de imagens foi socialmente vivido pelo grupo (talvez porque o Delfim não tem muita confiança nele e precisa da confirmação do Abel, parágrafos 64 e 65). O Abel executa o que Delfim lhe ditou, vai ver o que está a perturbar a aula e quando retoma a tarefa provavelmente tinha esquecido qual o Tarta que estava activo. Abel espantou-se que o resultado da viragem do Tarta em torno da linha horizontal fosse o que o computador assinalava. Assim a figura construída causou-lhe digamos um conflito cognitivo e ele soltou uma exclamação levando simultaneamente a mão à boca. Este gesto, muito rápido de espanto, revela discordância entre o encontrado e o previsto, evidencia mais claramente o uso de imagens antecipatórias que quase não tinha sido revelado (parágrafo 65). O gesto não era para ser comunicado, era dirigido ao próprio aluno, designemo-lo por gesto egocêntrico, era uma expressão, aviso ao discurso interior do Abel para mostrar divergência entre o seu pensamento lógico, a sua manipulação mental e a sua exteriorização através do micromundo Tarta. Depois Abel não conseguiu explicar o acontecido, e deixou-se ficar sem perceber, mas à cautela foi mudar o passo do Tarta de 1, talvez porque sabia que este passo lhe tinha provocado problemas. Repare-se que o gesto do Abel do parágrafo 65, é de natureza completamente diferente, é específico dum diálogo, é redundante porque mistura gesto e fala. O gesto deiético de Delfim teve por função partilhar comunicação, indicava um objecto e complementava a verbalização de Delfim (parágrafo 64).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos três episódios foram usados diferentes modos de comunicar e expressar mensagens: palavras (orais ou de forma escrita); modos de expressão (gestos); resultados de acção sobre o micromundo Tarta A aprendizagem envolveu acção e percepção e resultou do fazer, tocar, mover e ver, mas também envolveu processos de pensamento mais avançados.

Poder-se-á, talvez, olhar estes episódios na perspectiva de Arzarello et al. (2009) e falar de um feixe semiótico constituído por fala (oral e escrita), gestos e micromundo Tarta. Estas lentes semióticas permitem examinar a interacção na sala de aula a qual é multimodal e para esta tarefa envolveu interacções entre alunos e interacções com o micromundo Tarta. Este artefacto actuou como mediador entre os alunos e guiou a evolução de significados na aula, por outras palavras o artefacto pode funcionar como um mediador semiótico possibilitando: que o discurso seja partilhado, um nível potencial mais elevado de cooperação entre alunos e o desencadear dos modos de pensamento visual-espacial dos alunos.

Não se encontraram, para esta díade de alunos, *jogos semióticos* (estratégias de comunicação típicas entre sujeitos, que partilham as mesmas fontes semióticas numa situação específica) engendrados pelo professor, como os descritos por Arzarello e Paola (2007). Contudo neste estudo (Costa, 2006), para uma outra díade de alunos (de desempenho mais fraco a matemática) o referido fenómeno muitas vezes parece poder ser evidenciado.

Quadro 1: Actividade semiótica da díade de alunos nos 3 episódios.

<table>
<tr><th>Episódios</th><th>Tamanho</th><th>Gestos</th><th>Mediação do micromundo</th><th>Interacções entre os alunos</th></tr>
<tr><td>Episódio 1</td><td>1 - 19</td><td>Deiético
Icónicos
social</td><td rowspan="3">-No desencadear do pensamento visual-espacial;
-No manipular ideias matemáticas de deslizar, virar e rodar;
- No consciencializar informalmente propriedades das transformações geométricas;
- Abstracções são encorajadas a serem construídas do visual, não tanto de percepções mas mais da organização de acções sobre os objectos e incluiem imagética dinâmica;
- Transição do pensamento geométrico visual para o geométrico descritivo;
- Os comandos do micromundo e as figuras produzidas no ecrã ajudam a fazer conexões mentais entre diferentes representações e diferentes conhecimentos.</td><td>Os alunos trabalham cada um por si, disputam o teclado. Gozam de igual autoridade no grupo.</td></tr>
<tr><td>Episódio 2</td><td>50 - 56</td><td>Batimento
Icónico
social</td><td>Abel pensa e diz (autoridade de Abel) e Delfim faz ventriloquismo.
Micromundo Tarta e Abel actuam na ZDP de Delfim</td></tr>
<tr><td>Episódio 3</td><td>63 - 67</td><td>Egocêntrico
Deiético</td><td>Os dois alunos começam a trabalhar em grupo. À vez, um pensa e dita e o outro executa. A autoridade de Delfim aumenta, mas ainda precisa da concordância do Abel.</td></tr>
</table>

Tendo em conta os episódios acima descritos e respectivas análises, algumas constatações parecem ser identificadas sobre os gestos no ensino-aprendizagem duma matemática centrada em compreender o pensamento visual-espacial dos alunos. Nota-se um entrelaçamento complexo entre gestos, fala e produções resultantes de acções sobre o micromundo as quais por vezes desencadearam execuções mentais complexas (parágrafo 53). Estes ingredientes apoiaram conjuntamente os processos de pensamento dos alunos. O exame dos gestos dos alunos (considerados pela respectiva professora Bom e Médio relativo ao desempenho em matemática) da díade que aprende matemática mostra que não precisam da ajuda da professora para resolver a tarefa. Os dois alunos pertenciam ao "nível visual" de Van Hiele que de acordo com o modelo teórico de Costa (2006) parece envolver dois modos de pensamento, o modo resultante da percepção e o modo resultante da manipulação mental de imagens. Muitas vezes, no modo resultante da manipulação mental de imagens, ou a terminologia usada pelo aluno ainda não é adequada ao domínio do conteúdo em que está a trabalhar ou tem dificuldade em coordenar os diferentes sistemas de referência, e recorre então a gestos. O uso dos gestos pelos alunos parece estar relacionado com o tipo de pensamento visual-espacial em que os alunos estão envolvidos. Os gestos têm também uma função de comunicação, permitindo maneiras alternativas de organizar a informação que o aluno não era capaz de expressar verbalmente.

REFERÊNCIAS

Arzarello, F., e Edwards, L. (2005). Gesture and the constructing of mathematical meaning (research forum 2). Em H. L. Chick e J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 122-145). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Arzarello, F., Ferrara, F., Robutti, O., e Sabena, C. (2005). Shaping a multi-dimensional analysis of signs. Em H. L. Chick e J. L. Vincent (Eds.), *proceedings of the 29th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 127-131). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Arzarello, F., e Paola, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. Em Woo, J. H., Lew, H.C., Park, K.S. e Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 17-24). Seoul: PME.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., e Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 97-109.

Bishop, A.(1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 7-15.

Bogdan, R., e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*.Porto: Porto Editora.

Clausen-May, T., e Smith, P. (Eds.). (1998). *Spatial ability: A handbook for teachers.Berkshire*, Inglaterra: National Foundation for Educational Research.

Costa, C. (2006). *Modelo de pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade*. Tese de Doutoramento, não publicada, Universidade Nova de Lisboa.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational *Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Edwards, L. (2005). The role of gestures in mathematical discourse: Remembering and problem solving. Em Helen L. Chick e Jill L. Vincent (Eds.), *Proceedings of* *the 29th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 135-138). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Edwards, L. (2009). Gesture and conceptual integration in mathematical talk. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 127-141.

Goldin-Meadow, S., Kim, S., e Singer, M. (1999). What the teachers´s hands tell the student´s mind about math. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 720-730.

Goldin-Meadow, S. (2000). *Beyond words: the importance of gesture to researchers and learners. Child Development, 71*(1), 231-239.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., e Dormolen, J. (1996). Space and shape. Em A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick e C. Laborde, *International handbook of mathematics education* (pp. 161-204). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Johnson-Gentile, K. (1990). *The effects of computer and non-computer environments on fifth and sixth-grade students´conceptualizations of geometric motions*, Tese de doutoramento não publicada, University of New York at Buffalo, EUA.

Johnson, M. (1987). *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination and reason. Chicago*: The University of Chicago Press.

Lakoff, G., e Núnez, R. (1997). The metaphoric structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. Em Lyn D. English (Ed.*), Mathematical reasoning, analogies, metaphors and images* (pp. 21-89). Londres: Lawrence Erlbaum.

Lakoff, G., e Núnez, R. (2000). *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*. Nova Iorque: Basic Books.

Lewellen, H. (1992). *Conceptualizations of geometric motions in elementary school children: an extension of the Van Hiele model*. Tese de doutoramento não publicada, University of New York at Buffalo, EUA.

Maschietto, M., e Bussi, M. (2009). Working with artefacts: gestures, drawings and speech in the construction of the mathematical meaning of the visual pyramid. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 143-157.

Nunez, R. (2006). Do real numbers really move? Language, thought, and gesture: the embodied cognitive foundations of mathematics. Em F. Lida, R. Pfeifer, L. Steels e Y. Kunyoshi (Eds.), *Embodied artificial intelligence*. Nova Iorque: Springer-Verlag.

Presmeg, N. (1989). Visualization in multicultural mathematics classroom. *Focus on learning problems in mathematics, 11*(1), 17-24.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprounting of signs: a semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning, 5*(1), 37-40.

Radford, L., Edwards, L., e Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 91-95.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 111-126.

Roth, W. (2001). Gestures: *Their role in teaching and learning. Review of Educational Research, 71*(3), 365-392.

Sabena, C. (2004). The role of the gestures in conceptualization: an exploratory study on the integral function. Em M. J. Hoines e A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th PME conference* (Vol. 4, pp. 145-152). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Schoenfeld, A. (2002). Research methods in (mathematics) education. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 435-487). London: Lawrence Erlbaum.

Sfard, A. (2009). What' s all the fuss about gestures? A commentary. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 191-200.

Vygotsky L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Harvard: Harvard Univ. Press.

Williams, J. (2009). Embodied multi-modal communication from the perspective of activity theory. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 201-210.

Zimmermann, W., e Cunningham, S. (1991). Editors´ introduction: What is mathematicalvisualization. Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-7). Washington, EUA: Mathematics Association of America.

Propostas didácticas potenciadoras de conexões entre matemática e ciências em contextos de educação formal e não formal – contributos do processo de validação

Sofia Nogueira; Celina Tenreiro-Vieira; Isabel Cabrita
U. Aveiro – CIDTFP

RESUMO

Recomendações curriculares em matemática, nacionais e internacionais, apelam ao desenvolvimento de capacidades ligadas à resolução de problemas e à comunicação e ao estabelecimento de conexões com outras áreas do saber, como as Ciências Físicas e Naturais. Contudo, em provas nacionais e internacionais, a média dos alunos portugueses apresenta baixo desempenho na resolução de situações relativas a Ciências Físicas e Naturais e a Matemática, particularmente, no que diz respeito à resolução de problemas. Uma via que poderá contribuir para potenciar o desenvolvimento das referidas capacidades consiste em estabelecer sinergias entre a escola e um contexto de educação não formal. Na presente comunicação descreve-se uma investigação em Didáctica que persegue como finalidade conceber, produzir, implementar e avaliar o impacto de situações de exploração de módulos interactivos de ciências no desenvolvimento de capacidades matemáticas de alunos do 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB). Apresenta-se uma síntese do quadro teórico de referência que orientou a concepção e a produção das referidas situações. Foca-se, ainda, a validação de documentos que suportam tais situações e outro que apresenta o quadro teórico referencial, decorrente de contributos de validadores e da implementação de um estudo-piloto.

FINALIDADE E OBJECTIVOS DO PROJECTO E DO PROCESSO DE VALIDAÇÃO DAS PROPOSTAS DIDÁCTICAS

Nesta comunicação, foca-se o processo de validação de instrumentos de recolha de dados que surge no âmbito de um projecto de doutoramento em Didáctica.

Este tem por finalidade avaliar o impacto de situações de exploração matemática de módulos interactivos de ciências, na promoção de capacidades ligadas à resolução de problemas e à comunicação, em alunos do 1º Ciclo do Ensino Básico [CEB]. Decorrente desta finalidade, foram concebidas, produzidas e validadas propostas didácticas, as quais articulam dois contextos de implementação: um formal (sala de aula) e outro não formal (Jardim da Ciência situado no Departamento de Educação da Universidade de Aveiro).

O processo de validação das propostas didácticas teve duas vertentes: painel científico; e estudo-piloto. Na primeira pretendeu-se corrigir os documentos, ao nível da Matemática, Biologia e Física. A segunda teve por objectivos adequar os documentos ao público-alvo e prever o tempo a despender no estudo de caso.

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

As situações de exploração matemática de módulos interactivos de ciências desenvolvidas solicitam a mobilização de capacidades de resolução de problemas e de comunicação (em) matemática. A opção por tal enfoque decorre de dois motivos. Um deles é relativo a recomendações curriculares nacionais e internacionais em matemática (Ponte et al. 2007a; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007; Ministério da Educação [ME] (2004a); Departamento de Educação Básica [DEB], 2001) e a posições assumidas por diversos investigadores em Educação em Matemática. Tais posições e recomendações enfatizam, entre outros aspectos, a necessidade de estabelecer conexões entre a matemática e as ciências físicas e naturais e o desenvolvimento da resolução de problemas e da comunicação (em) matemática dos alunos no Ensino Básico. Neste âmbito, é de salientar o preconizado, neste âmbito, no *Programa de Matemática do Ensino Básico* [PMEB] (Ponte et al., 2007). Neste documento de orientação curricular, a comunicação matemática e a resolução de problemas são identificadas como capacidades transversais a toda a aprendizagem de Matemática. A este nível, para o 1º CEB são enunciados objectivos gerais de aprendizagem como: desenvolver as capacidades de “resolver problemas em contextos matemáticos e não matemáticos, adaptando, concebendo e pondo em prática estratégias variadas e avaliando resultados” (p. 29) e “comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos” (id:ib). Ainda, nos Objectivos Gerais do ensino da Matemática, o documento destaca o papel das conexões intra-matemática, com outras áreas do saber e com situações do quotidiano. O outro motivo relaciona-se com os baixos resultados de alunos portugueses do Ensino Básico em estudos que avaliam o seu desempenho em matemática e em ciências. Relativamente a estudos internacionais, destaca-se o *Third International Mathematics and Science Study* [TIMSS] e o *Programme for International Student Assessment* [PISA]. A avaliação do PISA acontece em ciclos de três anos, tendo tido início em 2000. Em cada ciclo são avaliados os domínios da literacia em leitura, da literacia matemática e da literacia científica. Contudo, cada ciclo focou a avaliação de um domínio, respectivamente: literacia em leitura (2000); literacia matemática (2003); e literacia científica (2006). Nos três ciclos do PISA, os resultados médios dos alunos portugueses em literacia matemática e em literacia científica são, claramente, inferiores aos obtidos, em média, no espaço da OCDE (GAVE, 2001, 2004a, Pinto-Ferreira et al., 2007). O PISA 2003 apresentou um domínio adicional – o da resolução de problemas (GAVE, 2004b), no qual se verificou que o desempenho médio dos alunos portugueses avaliados é inferior ao da média dos da OCDE

(GAVE, 2004c). Em provas nacionais de aferição de matemática do 4º ano de escolaridade do 1º CEB (ME, 2004b), os resultados dos alunos avaliados denotam que a maioria evidencia baixos níveis de consecução na resolução de problemas e na comunicação (em) matemática, entre outros aspectos.

A implementação das situações de exploração de módulos interactivos de ciências articula dois contextos: um de educação formal (sala de aula) e outro de educação não formal (Jardim da Ciência). A selecção dos mesmos deve-se ao reconhecimento mundial de que a escola não pode nem deve ser a única responsável pela promoção da literacia (National Science Board [NSB], 2002). Assim, é legítimo procurar respostas eficazes na educação não formal como um dos contributos para tal (United Nations Education Science and Culture Organization [UNESCO], 2006a) e, quando possível, nas sinergias entre esta e a educação formal (UNESCO, 2006b; Metz, 2005).

A criação de oportunidades de desenvolvimento de capacidades de ordem superior no contexto da educação matemática dos alunos, tais como a resolução de problemas e a comunicação (em) matemática, é essencial, como forma de os preparar para os desafios do dia-a-dia, quer a nível pessoal quer a nível profissional.

A partir da revisão de literatura sobre a resolução de problemas e a comunicação (em) matemática, construiu-se um referencial teórico que permite identificar capacidades básicas ligadas à resolução de problemas e à comunicação (em)matemática. O mesmo orientou a concepção e a produção das situações matemáticas a propor aos alunos participantes no estudo e a avaliação do seu desempenho.

A resolução de problemas como capacidade superior

Com base em aspectos comuns emergentes da análise comparativa entre perspectivas de diversos autores sobre a resolução de problemas (Dewey, 1910, citado por Ausubel et al., 1968; Pólya, 1946; Fan e Zhu, 2007; Hayes, 1981; Bransford e Stein, 1993; Rebola, 2002; Lester, Charles e O´Daffer, em Fonseca, 1997; GAVE, 2004b; Ball et al., 2005; Lima, 2007; NCTM, 2007), no Quadro 1, identificam-se momentos que a caracterizam.

Do quadro 1 ressaltam dois aspectos:

A resolução de um problema pode não englobar todos os momentos enunciados. Porém, estes tendem a suceder, como referido no Quadro 1;

Quando o resolvedor se encontra no momento de Avaliar o trabalho desenvolvido pode sentir necessidade de conceber novo plano ou até mesmo de reler o enunciado para melhorar a sua compreensão do problema de modo a alcançar outra solução.

Quadro 1. O que envolve cada momento da resolução de problemas.

Momento	**O que envolve**
Compreensão do problema	Identificar e compreender a questão, as condições, as variáveis e os dados relevantes do problema
Concepção de um plano	Seleccionar estratégias de resolução de problemas adequadas
Execução do plano	Implementar a(s) estratégia(s) de resolução de problemas planeada(s)
Avaliação do trabalho desenvolvido	Rever o trabalho desenvolvido até então Concluir acerca da (in)existência de uma solução Efectuar ajustamentos considerados necessários em ordem à obtenção de uma solução adequada ou a mais adequada possível ao contexto do problema (possibilidade de proceder à concepção de novo plano e podendo ou não, ser antecedida de nova compreensão do problema)
Comunicação da resolução do problema	Organizar e sistematizar os dados relevantes do caminho percorrido para obter uma resposta e da solução alcançada, dirigindo a comunicação a si ou a uma audiência externa (tais dados são relativos à Compreensão do problema, à Concepção de um plano e à Execução do plano)
Sistematização de aprendizagens	Identificar dificuldades e acções bem sucedidas Identificar possíveis aplicações de aprendizagens decorrentes da resolução do problema

Tendo por base uma revisão de literatura focada em capacidades básicas que concorrem para a resolução de problemas que considerou as perspectivas enunciadas em programas curriculares de Matemática (Ponte et al., 2007a; NCTM, 2007; DEB, 2001) e outros autores como Pólya (1946) e GAVE (2004b), construiu-se o Quadro 2.

Quadro 2. Descrição de capacidades básicas de resolução de problemas relativas aos diferentes momentos.

Momento	**Descrição de capacidades específicas relativas ao momento correspondente**	**Capacidades transversais a todos os momentos**

Compreensão do problema	Formular o problema por outras palavras Identificar a questão do problema Identificar as condições do problema Identificar os dados do problema relevantes para a sua resolução	Relacionar informações do problema entre si e com informações anteriores Utilizar notação científica adequada Utilizar (construir e/ou interpretar) representações matemáticas adequadas Traduzir a linguagem comum em linguagem matemática e o inverso
Concepção de um plano de resolução do problema	Identificar um problema relacionado com o que se quer resolver Seleccionar as estratégias a utilizar na resolução do problema	
Execução do plano de resolução do problema	Implementar a(s) estratégia(s) seleccionada(s) Evidenciar uma ou mais soluções para o problema ou concluir sobre a inexistência desta	
Avaliação do trabalho desenvolvido	Analisar a(s) estratégia(s) implementada(s) e corrigir eventuais erros Seleccionar e identificar a melhor solução (no caso de ser apresentada mais que uma) Justificar a solução seleccionada através da melhor adequação à(s) condição(ões) e aos objectivos do problema	
Comunicação da resolução do problema	Apresentar o trabalho desenvolvido até ao alcance da melhor solução Adequar os meios e as estratégias utilizadas na comunicação da resolução do problema a uma audiência particular	
Sistematização de aprendizagens	Identificar dificuldades na resolução do problema Identificar acções bem sucedidas Utilizar a solução e/ou a(s) estratégia(s) em outras situações em que seja(m) adequada(s)	

A comunicação (em)matemática como capacidade superior

Com base em diversos autores (NCTM, 1991, 2007; ME, 2004a; DEB, 2001; Correia, 2005; Bransford e Stein, 1993; Ponte et al., 2007a; Ponte et al.

2007b; Bassarear, referido em Mamede, 2002; Martins et al., 2002), identificaram-se capacidades básicas da comunicação (em) matemática e aspectos que concorrem para o uso eficaz de tais capacidades, conforme se evidencia no Quadro 3.

Quadro 3. Descrição de capacidades básicas da comunicação (em) matemática.

Descrição da capacidade	**Aspectos que concorrem para o uso eficaz de cada capacidade**
Apresentar, oralmente ou por escrito, o pensamento matemático pessoal	Definir e considerar a Mensagem Definir e considerar o Objectivo Ter em consideração a Audiência Ter em consideração a Linguagem (Clareza, Rigor e Organização de ideias) Identificar os Recursos necessários
Argumentar a propósito de situações que envolvam informação científica	Tomar uma posição pessoal (e, se necessário, modificá-la), sempre que as evidências e as razões sejam suficientes para o fazer Apresentar argumentos matemáticos válidos, claros e completos para defesa da sua posição e justificar métodos, procedimentos e resultados (através, por exemplo, da apresentação de evidências empíricas, de alguns exemplos, da especificação de propriedades matemáticas utilizadas)
Interagir com o outro numa situação que envolva informação científica	Apresentar e justificar a sua posição Escutar e respeitar a posição de outrem sobre aspectos relevantes em situações que envolvam informação matemática Compreender a posição de outrem (avaliar os argumentos matemáticos de outrem, identificando nestes, pontos fortes e limitações), sendo capaz de a parafrasear Questionar e responder a questões de esclarecimento do pensamento matemático (por exemplo: Qual a tua posição sobre "…"?; Por que és dessa opinião?; O que queres dizer com "…"?; Que exemplo me dás daquilo que afirmas?; Podes descrever-me como alcançaste essa resposta?; Por que preferes essa hipótese (e não outra)?; Como é que essa hipótese se adequa a esta situação?; O que queres dizer é "…"?) Negociar significados
Lidar com diferentes representações matemáticas,	(Re)construir as suas próprias representações ainda que não convencionais mas que produzam sentido para quem as concebe/interpreta

apropriadamente	Construir e interpretar representações matemáticas convencionais (por exemplo, diagramas, esquemas, tabelas, quadros, gráficos, expressões simbólicas) Compreender ideias/informação matemática contidas em diversas representações matemáticas Seleccionar, aplicar e interpretar representações para evidenciar compreensão e resolução de um problema, para registar uma estratégia de resolução e para o descrever a outros Identificar e analisar pontos fortes e fracos de diversas representações atendendo a objectivos diferentes Construir e alternar entre diversas representações matemáticas
Combinar a linguagem matemática e a linguagem comum de forma eficiente	Ler, interpretar e escrever textos de matemática, sobre a matemática ou em que haja informação matemática Traduzir um enunciado oral ou escrito, da linguagem matemática para a linguagem comum e o inverso Utilizar, adequadamente, a terminologia e a simbologia matemática convencional Descrever, matematicamente, objectos, relações e ideias

Os quadros 1, 2 e 3 permitiram orientar o desenvolvimento de propostas promotoras das capacidades matemáticas supramencionadas, relativas a três dos diversos módulos do JC.

O Jardim da Ciência

No Anexo são apresentados os módulos existentes no JC e a informação de exploração contida no placard junto a cada um, usada em visitas guiadas.

O Laboratório Aberto de Educação em Ciências [LEduC] (fig. 1) e o Espaço Desafios (fig. 2) são espaços que se encontram ligados ao JC.

Fig. 1 Interior do LEduC (laboratório e sala de trabalho)

Fig. 2 Espaço Desafios

O LEduC compreende um laboratório e uma sala de trabalho. Pretende promover a cultura científica de alunos do Jardim-de-Infância até ao 2º CEB e a articulação entre a investigação em Educação em Ciências e a formação inicial e contínua de docentes. Alunos de formação inicial e continuada de professores do Ensino Básico e investigadores podem aí desenvolver recursos didácticos e (re)avaliar o seu impacto.

O *Espaço Desafios* encontra-se coberto e possui mesas onde os visitantes podem manipular objectos na realização de jogos e desafios sobre a Ciência e/ou Tecnologia. Entre estes encontram-se periscópios, prismas, espelhos curvos, puzzles e ímanes.

METODOLOGIA

Atendendo à finalidade da investigação, esta assume-se como investigação-acção possuindo uma natureza, tendencialmente, qualitativa com intenções interpretativas, seguindo uma abordagem de estudo de caso, tal como defendido por … (aqui deveria mencionar alguns autores).

Desenvolvimento

A selecção dos módulos envolveu a identificação da Ciência Física ou Natural para que estava vocacionada a exploração de cada um e as suas potencialidades em estabelecer conexões com a Matemática através da análise dos programas curriculares nacionais para o 1º CEB, em matemática e em ciências experimentais. Os módulos e as temáticas (duas relativas a Física e uma a Biologia) escolhidos foram: “Cordas que Tocam” incidindo em Alavancas e Equilíbrios; “Tenda de Espelhos” focando Espelhos; e “Aquário da nossa Costa” explorando Biodiversidade aquática.

Sobre a exploração dos módulos seleccionados foram concebidas e produzidas situações matemáticas cujo referencial consta nos quadros 1, 2 e 3. Tais situações encontram-se na colecção “Visita de Estudo ao Jardim da Ciência”, desenvolvida no âmbito do referido projecto. Tal colecção compreende um documento que a contextualiza, três guiões do professor e respectivos guiões do aluno. Cada um dos últimos foca a exploração de um dos referidos módulos seleccionados do JC, através da vivência de situações promotoras das capacidades de resolução de problemas e de comunicação (em)matemática destinadas a serem realizadas em sala de aula (antes e após a visita) e no JC, incluindo o LEduC e o Espaço Desafios.

Validação por um painel científico

A selecção dos quatro validadores dos documentos pertencentes à colecção "Visita de Estudo ao Jardim da Ciência" atendeu a critérios de adequação do seu currículo vitae profissional aos objectivos perseguidos por tais documentos.

Um propósito do documento que enquadra a colecção a que pertence é a contextualização do desenvolvimento das situações propostas nos guiões do aluno e a avaliação das suas produções através da apresentação de um quadro teórico de referência sobre resolução de problemas e comunicação (em)matemática, pois o propósito base das situações propostas nos guiões do aluno é a promoção de tais capacidades. Por esses motivos, foi seleccionado um validador licenciado em Matemática, mestre em Ciências da Educação, doutorado em Didáctica, com larga experiência como docente do ensino superior nas áreas de Matemática, Didáctica e Supervisão de Prática Pedagógica e que desenvolve investigação na área de Didáctica e, em particular, da integração da História e Filosofia da Matemática/Ciência na formação de professores para a escolaridade básica. Entre os seus contributos, destaca-se a reformulação na enunciação de algumas capacidades ligadas à resolução de problemas e a correcção científica de conceitos matemáticos e o seu uso mais adequado nos enunciados das propostas.

Dois dos guiões do aluno apresentam propostas cujo contexto é a Física. Assim, seleccionou-se outro validador que é doutorado na área da Física, docente de Didáctica da Física a alunos da licenciatura em Educação Básica, organizador e membro de comissões científicas em eventos científicos nacionais e internacionais na área da Física, orientador no âmbito da disciplina de Prática Supervisionada numa Universidade e que se tem envolvido em projectos ligados ao desenvolvimento de recursos didácticos em Física, à divulgação científica e à educação não formal (entre os quais, o *Ciência Viva*). O contributo deste validador centrou-se na correcção científica de conceitos e de procedimentos próprios da Física e em aspectos da didáctica da Física.

Outro guião do aluno foca propostas ligadas à Biologia marinha. Por esse motivo, seleccionou-se um validador licenciado em Biologia e mestre em Biologia Marinha com experiência profissional como monitor em contextos de educação não formal em ciências, nos quais, entre outras funções, assumiu as de monitor e de manutenção de aquários. O seu contributo reflectiu-se a nível da correcção científica de conceitos específicos de Biologia e de alterações de enunciados de propostas de modo a que estes se tornassem mais precisos e claros e apresentassem situações mais credíveis.

As situações propostas destinam-se a alunos do 4º ano do 1º CEB e, por isso, considerou-se haver necessidade de seleccionar um validador com longa experiência de leccionação no 1º CEB. O validador seleccionado possui trinta e dois anos de serviço docente, um Mestrado em Gestão Curricular (ligado ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática), é formador no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática com Professores do 1ºCEB e participou num projecto de produção de recursos didácticos para o ensino de ciências no 1º CEB. Os seus contributos tiveram especial impacto na reformulação da apresentação das situações propostas, nomeadamente, ao nível gráfico e da adequação da linguagem ao público-alvo e no desenvolvimento dos guiões do professor.

Após reformulação dos guiões do aluno, na sequência da apreciação feita pelos diferentes validadores, decidiu-se fazer uma implementação piloto dos mesmos com o propósito de os melhor adequar ao público-alvo (alunos do 4º ano do 1º CEB) e aos objectivos mencionados.

ESTUDO-PILOTO

O estudo-piloto teve por objectivo principal recolher dados que, depois de analisados, pudessem apoiar na concretização dos guiões do professor e na reformulação das situações propostas nos guiões dos alunos.

Selecção dos participantes

Cada guião do aluno foi implementado numa de três turmas do 3º ano do 1º CEB. A escolha deste ano de escolaridade deveu-se ao facto do estudo-piloto ter decorrido durante o 3º período do ano lectivo 2008/2009 e tais alunos se encontrarem, em termos etários e de programa curricular leccionado, mais próximos dos alunos do 4º ano do EB, no início do ano lectivo, que constituem o estudo de caso. As turmas foram escolhidas devido à proximidade geográfica entre as respectivas escolas e a Universidade de Aveiro, onde teriam de se deslocar, numa visita de estudo, após a anuência dos respectivos docentes titulares de turma e de informação aos coordenadores dos respectivos coordenadores de agrupamento e de escola.

Caracterização dos participantes no estudo-piloto

O estudo-piloto envolveu 66 alunos com uma média de idades de 9 anos, repartidos por três turmas do 1º CEB (quadro 5), distribuídas por duas escolas situadas em zonas limítrofes da cidade de Aveiro.

Considerando a variável sexo poder-se-á afirmar que a distribuição é, relativamente, equilibrada (30 rapazes e 36 raparigas). Contudo, há mais indivíduos do sexo masculino nas turmas A e C. Os alunos com Necessidades Educativas Especiais [NEE] e Dificuldades de Aprendizagem [DA] apenas fizeram as propostas durante a visita por, nos dias da ida à escola, se ausentarem da sala de aula para realizar actividades com a professora de apoio ou por estarem a realizar fichas de avaliação.

Quadro 4. Caracterização das turmas participantes no estudo-piloto e guião implementado em cada uma

Turma	Nº de alunos	Nº de alunos com Necessidades Educativas Especiais e Dificuldades de Aprendizagem	Rapazes		Raparigas	
			Nº	%	Nº	%
A	22	0	9	41	13	60
B	19	3	10	52	9	48
C	25	1	11	44	14	56

Implementação dos guiões

Em cada turma foi implementado um diferente guião do aluno, conforme explicitado no quadro 5.

Quadro 5. Guiões do aluno implementados em cada turma

Turma	Guião do aluno implementado
A	Uma visita de estudo ao Jardim da Ciência – Explorando a **Tenda de Espelhos**
B	Uma visita de estudo ao Jardim da Ciência – Explorando o **Aquário**
C	Uma visita de estudo ao Jardim da Ciência – Explorando **Cordas que Tocam**

Os guiões do aluno estão organizados em três fases, relativas à visita de estudo ao JC: Antes da visita; Durante a visita; Após a visita.

A implementação de cada fase decorreu por sessões. Em cada sessão optou-se por entregar aos alunos apenas as folhas do guião do aluno, contendo as questões cuja resolução era proposta para aquele momento. Deste modo, pretendeu-se salvaguardar o efeito surpresa relativo aos desafios propostos no momento. Pediu-se aos alunos que, logo após a recepção de cada folha, se identificassem, registando em cada página com o seu nome e apelido e que escrevessem a data. Finda cada sessão, as folhas eram imediatamente recolhidas e guardadas pela investigadora. Assim, pretendeu-se prevenir que os alunos perdessem folhas do seu guião.

Diário de investigação

Durante a implementação de cada guião foram redigidas notas de campo. O seu objectivo era o de registar informação útil à reformulação do guião e à sua implementação, entre as quais se destacam: a organização dos alunos na resolução das propostas; o tempo dispendido na resolução de cada proposta; as dificuldades manifestadas pelos alunos, ao nível da compreensão do enunciado, da resolução do proposto e da manipulação dos recursos, entre outras; imprevistos; alterações, imediatas, ao solicitado no guião, atendendo a imprevistos; ideias de reformulações consideradas no momento.

Reunião com os docentes titulares das turmas participantes no estudo-piloto

Após cada sessão existiu um diálogo com as professoras acerca: i) do modo de trabalho usado na resolução de cada situação proposta; ii) das dificuldades apresentadas pelos alunos; e iii) de alterações a introduzir na apresentação das situações propostas que pudessem ser potencialmente facilitadoras da compreensão do aluno face ao solicitado.

Após a implementação dos guiões dialogou-se com cada docente acerca i) das suas impressões sobre o guião implementado e o feedback dos alunos ii) e da proposta de guião reformulada que lhes foi apresentada, considerando as notas de campo e a análise das produções dos alunos. Os docentes apenas tiveram acesso ao guião reformulado, durante a reunião. Na sua opinião, cada guião reformulado estava, globalmente, melhor conseguido que o implementado. Ainda assim, sugeriram a reformulação de alguns enunciados e alterações na disposição de alguma informação.

A docente da turma onde foi implementado o guião focado na exploração da Tenda de Espelhos era contratada e possuía 8 anos de experiência lectiva no 1º CEB. É Mestre em Educação em Ciências no 1.º CEB, o que se revelou útil nas sugestões de reformulação que fez relativamente a aspectos da Física. Relativamente ao guião do aluno implementado, a professora salientou que algumas ilustrações estavam pouco perceptíveis e que o texto de alguns enunciados era extenso para os alunos. Sobre o guião reformulado referiu que, de um modo global, se encontrava com um grau de complexidade mais adequado aos alunos, enunciados mais claros e propostas que exigiam menos tempo de resolução. Todavia fez três sugestões de alteração: uma dizia respeito a tornar uma das propostas mais complexa; as outras a aspectos práticos, como distribuir uma folha de rascunho, numa proposta, e marcar os três tipos de espelhos da Tenda de Espelhos.

Relativamente ao guião focado no Aquário, a docente considerou as propostas entusiasmantes. Porém, salientou que algumas eram demasiado complexas para os alunos, uma vez que ainda não tinham trabalhado ou não tinham bem consolidados, conteúdos solicitados como o conceito de volume e do cálculo da décima parte, do quociente de um número inteiro por um número decimal e da metade de um número inteiro ímpar. Em relação às propostas que envolviam conteúdos do conhecimento dos alunos, a professora foi de opinião que se deveriam manter. A reformulação do guião foi apenas parcial, uma vez que, então, o aquário se encontrava em processo de decisão sobre se o seu ambiente seria mudado – o que veio a suceder, dando lugar a um aquário que, actualmente, apresenta espécies predominantes na costa de Aveiro. Por esse motivo, apenas algumas situações foram resgatadas.

Relativamente ao guião focado na exploração do módulo Cordas que Tocam, a docente considerou a maioria das propostas adequadas ao nível dos conteúdos abordados e do grau de complexidade do desafio. Identificou como dificuldade dos alunos, a compreensão do pedido em alguns enunciados (por exemplo, a descrição da relação matemática entre relação entre o comprimento do braço de uma catapulta e a distância a que o objecto é projectado a propósito dos lançamentos que fizeram de um objecto para tentar acertar no interior de um castelo). De um modo global, a docente é de opinião que as propostas apresentadas no guião reformulado possuem um grau de complexidade adequado ao 4º ano de escolaridade, são atractivas e promotoras de capacidades ligadas à resolução de problemas e à comunicação (em) matemática. As suas sugestões orientaram a elaboração de enunciados mais claros e a organização da informação apresentada.

A observação no estudo-piloto permitiu identificar nos guiões do aluno, aspectos merecedores de reformulação. Relativamente às situações propostas houve necessidade de produzir enunciados mais claros (em alguns casos, o uso de vocabulário desconhecido para os alunos como “amplitude” e “anamórfico”) e de adaptar o seu grau de complexidade (a título ilustrativo, os alunos tiveram dificuldade em desenhar um periscópio em 3D e uma figura numa grelha seguindo coordenadas e em traduzir em linguagem corrente uma expressão matemática que representava o equilíbrio de crianças num balancé). Em relação ao aspecto gráfico os alunos revelaram dificuldade em compreender as imagens ora por terem tamanho reduzido, ora por estarem com pouca resolução, ora por serem figuras. Assim, tornou-se necessário substituir figuras por documentos autênticos com melhor resolução (por exemplo, fotografias dos módulos e de objectos a planificar e construir como o periscópio e um castelo). A ineficácia do modo de trabalho dos alunos em algumas propostas motivou que algumas tarefas individuais se destinassem a serem realizadas em grupo e o contrário e organização dos alunos em grupos de trabalho (para as tarefas propostas verificou-se que o número de elementos mais adequado seria 4 ou 5).

No âmbito da resolução de problemas, os alunos apresentaram mais dificuldade na compreensão do enunciado, o que comprometeu a mobilização de capacidades ligadas às fases seguintes. No âmbito da comunicação (em)matemática revelaram mais dificuldade na escrita face à oralidade e na combinação da linguagem matemática com a linguagem comum de forma eficiente, de que é exemplo, a descrição de figuras e sólidos geométricos e o questionamento aos colegas envolvendo informação matemática.

CONCLUSÕES

A apreciação dos validadores e a implementação do estudo-piloto sobre as versões reformuladas permitiram identificar alterações que deveriam ser feitas, sobretudo, ao nível: do aspecto gráfico (tamanho/qualidade/adequação/atractividade das imagens, disposição e quantidade de informação); da clarificação dos enunciados (substituição de vocabulário); da adequação do grau de complexidade das situações integradas nos guiões do aluno (na maior parte dos casos, tal implicou a redução da complexidade da tarefa); da organização do modo de trabalho dos alunos na resolução das situações propostas. Ainda, permitiu obter informações a considerar na elaboração dos guiões do professor, tais como: a sugestão de alternativas de implementação face à ocorrência de diversas situações; a enumeração dos recursos necessários; a organização dos alunos em conjugação com o diversificar o modo de trabalho de modo a potenciar a aprendizagem (individual/grupo/turma); o tempo estimado para a maioria concretizar cada situação proposta; possíveis reacções dos alunos; de questões que o professor pode colocar ao aluno para estimular o seu pensamento e daquelas que se sugere que não sejam feitas por serem indutoras de uma resposta correcta; antecipação de dúvidas dos alunos, perspectivando linhas de actuação para ajudar os alunos a ultrapassá-las.

REFERÊNCIAS

Ausubel, D., Novak, J., Hanesian, H. (1968). *Educational Psychology*. *A cognitive view*. New York: Holt Rinehart and Winston.

Ball, D., Ferrini-Mundy, J., Kilpatrick, J., Milgram, R., Schmid, W., Schaar, R. (2005). Reaching for Common Ground in K–12 Mathematics Education. *Notices of the AMS*. 52(9), 1055-1058.

Bransford, J. and Stein, B. (1993). *The IDEAL problem solver. A guide for Improve Thinking, Learning, and Creativity*. New York: W. H. Freeman and Company.

Correia, E. (2005). *Aprender matemática – hoje: ensino básico*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Departamento de Educação Básica [DEB] (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências essenciais do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Fan, L, and Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics,* 66(1), 61-75.

Fonseca, L. (1997). Processos utilizados na resolução de problemas por futuros professores de matemática. Em, A. Borralho e M. Borrões (Eds.). *Ensino/Aprendizagem de Matemática: Algumas perspectivas metodológicas*. Évora: Universidade de Évora, 9-65.

Gabinete de Avaliação Educacional [GAVE] (2004a). *Resultados do Estudo Internacional PISA 2003*. Lisboa: ME/GAVE.

GAVE (2004b). *Conceitos Fundamentais em Jogo na Avaliação de Resolução de Problemas*. Lisboa: ME/GAVE.

GAVE (2004c). *Resultados do Estudo Internacional PISA 2003*. Lisboa: ME/GAVE.

GAVE (2001). *Resultados do Estudo Internacional PISA 2000*. Lisboa: ME/GAVE.

Hayes, J. (1981). *The complete problem solver*. New Jersey: Lawrence Erlbaum

Lima, A. (2007). *TIC e desenvolvimento de competências de resolução de problemas*. Tese de mestrado em Educação em Ciências no 1º Ciclo do Ensino Básico. Documento policopiado. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Mamede, E. (2001). *O papel da calculadora na resolução de problemas: um estudo de caso no 1.º Ciclo do Ensino Básico.* Tese de mestre em Educação, área de Especialização em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática. Documento policopiado. Braga: Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.

Martins et al. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da matemática. *In* Ponte et al. *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores*. Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. 59-82. Coimbra.

ME (2004). *Provas de aferição do Ensino Básico — relatórios nacionais*. Lisboa: Ministério da Educação/Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar Matemática: contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Educação. Lisboa: APM.

Metz, D. (2005). Field-Based Learning in Science: Animating a Museum experience. *Teaching Education, 16* (2), 165-173.

Ministério da Educação [ME] (2004a). *Programa do 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: ME.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM. Tradução portuguesa: APM.

National Science Board [NSB] (2002). Science and technology: public attitudes and public understanding. *Science and Engineering Indicators.* Washington, DC: U.S. Government Printing Office.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* (Tradução portuguesa). Lisboa: APM e IIE.

Pinto-Ferreira et al. (2007). *PISA 2006 – Competências científicas dos alunos portugueses.* Lisboa: ME/GAVE.

Pólya, G. (1946). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton (NJ): Princeton University Press.

Ponte, et al. (2007a). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* ME/DGIDC.

Ponte, et al. (2007b). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática, *Revista Portuguesa de Educação*, 20(2), 39-74.

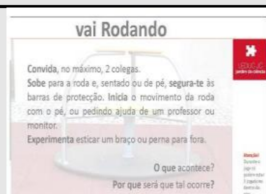
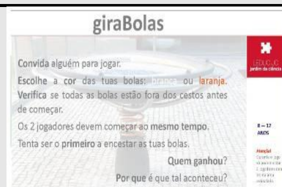
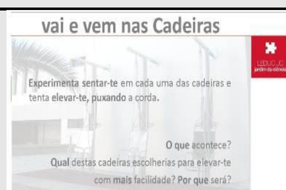
Rebola, F. (2002). *Transferência de capacidades de resolução de problemas em contexto escolar a partir do domínio específico das Ciências da Natureza. Um estudo qualitativo com alunos do 6º ano.* Tese de Mestrado em Educação, especialidade Didáctica das Ciências. Documento policopiado. Lisboa: Universidade de Lisboa.

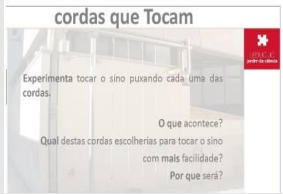
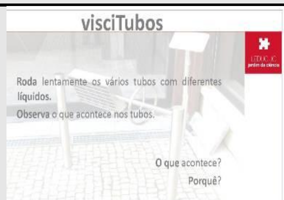
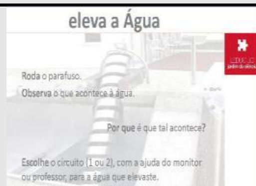
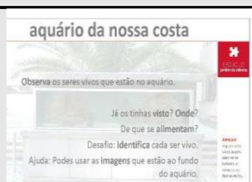
UNESCO (2006a). *Handbook for Literacy and Non-formal Education Facilitators in Africa*. Paris: UNESCO.

UNESCO (2006b). *Synergies between Formal and Non-formal Education: An Overview of Good Practices.* Paris: UNESCO.

ANEXOS

Anexo Circuitos, módulos e placards do Jardim da Ciência.

<table>
<tr><th></th><th>Módulo</th><th>Placard</th></tr>
<tr><td rowspan="2">CIRCUITO DA ÁGUA</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">CIRCUITO DE FORÇAS E MOVIMENTO</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>CIRCUITO DA ÁGUA</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

Análise do manual escolar de matemática *"Amiguinhos"*, do 2º ano de escolaridade

Maria João Silva
Universidade Aberta,
Darlinda Moreira
Universidade Aberta, CIE-IEUL

RESUMO

Reconhecendo o impacto que a resolução de diferentes tipos de problemas aditivos/subtractivos têm no desenvolvimento do raciocínio matemático, e sabendo a relevância que o manual escolar tem dentro de sala de aula, pretendemos analisar as propostas de actividades apresentadas no manual de modo a perceber como estas podem mediar as actividades pedagógicas no tema das operações. Para isso, este trabalho irá apresentar a análise do manual escolar *Amiguinhos*, em utilização no 2º ano de escolaridade da disciplina de Matemática, do ponto de vista do tipo de problemas e do tipo de exercícios das operações aritméticas (adição e subtracção) que apresenta.

A literatura indica-nos que as situações problemáticas permitem a evolução das concepções infantis para teoremas mais abstractos e adequados. Diversos estudos na área do desenvolvimento do raciocínio matemático enfatizam o papel preponderante da resolução dos problemas na apropriação das noções matemáticas (Brocardo e Serrazina, 2008; Ponte e Serrazina, 2000; Vergnaud, 1997). A par com a literatura, a antiga *Organização Curricular e Programas do 1º ciclo*, para a disciplina de Matemática, (M.E., 2004) e o actual *Programa de Matemática do Ensino Básico* (M.E., 2007), colocam a ênfase na relevância dos conhecimentos serem transmitidos a partir de situações do quotidiano, surgindo a resolução de problemas como uma ferramenta contextualizadora das diferentes operações aritméticas.

Estudos acerca das práticas dos professores portugueses de Matemática mostram que, por um lado, estas são marcadas pelo recurso a exercícios, seguidas dos problemas, e por outro, que o manual é um dos recursos mais utilizados (Castro, 1999; Morgado, 2004; Ponte e Serrazina, 2004; Silva, 2004). Ainda estudos acerca das práticas pedagógicas, dos conteúdos e da natureza das actividades que ocorrem na sala de aula, mostram-nos que estes são maioritariamente orientados a partir do manual adoptado (Castro, 1999; Jitendra, Grifin, Deatline-Buchman, Dipipi-Hoy, Sczesniak, Sokol e Xin, 2005; Morgado, 2004; Nathan, Long e Alibali, 2002; Reys, Reys, e Chávez, 2004; Vilela, 1991; Yakhontova, 2001).

Apesar da literatura acerca da aprendizagem infantil e dos conteúdos curriculares nos apontarem no sentido da relevância da resolução de problemas para a aprendizagem, diversos estudos mostram-nos que os manuais escolares ainda não dão a devida importância a esta questão (Silva, 2006; Silva, 2009).

Assim, a partir da agenda de investigação definida por Moreira, Ponte, Pires e Teixeira (2006), centrada no domínio da utilização dos manuais escolares de Matemática por professores, alunos e pais, concretizado nas questões de investigação "Como é que os professores integram os manuais escolares na sua prática pedagógica? Como é que os articulam com os outros materiais didácticos?" (p.12), pretendemos contribuir para este debate apresentando parte de um projecto de investigação, ainda em desenvolvimento. Concretizando, ambicionamos contribuir para dar resposta à seguinte questão de investigação: *Como se caracteriza o manual escolar de Matemática, do 2º ano de escolaridade, Amiguinhos, da Texto Editores, quanto ao tipo de problemas aditivos e subtractivos e ao tipo de exercícios que apresenta para estas operações aritméticas?*

Iremos, de seguida, apresentar a revisão da literatura que fundamenta esta questão, a metodologia desenvolvida na recolha de dados, os principais resultados encontrados até ao momento e as respectivas conclusões.

A aprendizagem do número e das operações e a resolução de problemas

É clara a valorização da resolução de problemas no Currículo Nacional do Ensino Básico (M. E., 2001), pois define como matematicamente competente, aquele que compreende a estrutura de um problema e tem aptidão para desenvolver processos de resolução, que decide sobre a razoabilidade do resultado encontrado e recorre ao cálculo mental, aos algoritmos ou aos instrumentos tecnológicos (M.E., 2007). O enfoque curricular é ainda colocado na promoção de um "desenvolvimento integrado de conhecimentos, capacidades e atitudes"; e a resolução de problemas surge como um exemplo de aprendizagem associada ao raciocínio e à comunicação matemática, bem diferente de conhecimentos isolados e técnicas de cálculo (M.E., 2001; 2007). No novo Programa de Matemática do Ensino Básico (M.E., 2007) e nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008), a resolução de problemas é um processo matemático que surge como uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diferentes conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Será no conteúdo matemático específico dos *Números e Operações* que este trabalho se irá centrar.

O sentido do número é definido, no Programa de Matemática (M. E., 2007) "como a capacidade para decompor números, (…), usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (…) e reconhecer a grandeza relativa e absoluta de números" (p.13). Espera-se que esta capacidade seja desenvolvida nos primeiros anos de escolaridade da criança, na medida em que constitui a base fundamental de todo o conhecimento matemático e para a criança operar eficazmente necessita de ter adquirido a noção de número e do seu valor posicional (Brissiaud, 1989; Fayol, 1996; NCTM, 2008; Ponte e Serrazina, 2000; Vergnaud, 1997).

Sabe-se que as crianças antes de receberem ensino formal das operações aritméticas conseguem resolver problemas simples, recorrendo às suas concepções infantis. Estas muitas vezes são noções erradas ou incompletas. Só se as crianças forem confrontadas com situações que não resolvem por definições é que poderão alterar as suas concepções erradas (Vergnaud, 1997). É perante um problema que os conceitos ou teorias das crianças têm sentido, e é quando esses conceitos não dão resposta aos problemas, que as crianças sentem a necessidade de alterarem as suas concepções e modificam os seus conhecimentos. Assim, a resolução de problemas enquanto exploração dos conceitos matemáticos através do estabelecimento de relações que conduz as crianças a desenvolverem o raciocínio matemático (M. E., 2007; NCTM, 2008; Ponte e Serrazina, 2000), constitui uma aprendizagem mais significativa do que o treino de algoritmos ou regras. O que sugere que os problemas podem dar significado às quatro operações, representando uma alternativa viável para desenvolver estes conceitos na escola (Fayol, Theveno e Devidal, 2005; NCTM, 2008; Ponte e Serrazina, 2000; Vergnaud, 1997).

É nos primeiros anos da escolaridade que as crianças desenvolvem a compreensão da natureza da resolução de problemas e a percepção de que a Matemática é mais do que um conjunto de factos, algoritmos e fórmulas. Se um aluno tiver contacto com um ensino sistemático em resolução de problemas espera-se um melhor desempenho do que aquele que simplesmente se limitou a resolver o problema sem nenhum ensino sistemático. Vale (1997), refere que um certo fracasso dos alunos em resolução de problemas, se deve ao facto de se ignorar o desenvolvimento dos aspectos metacognitivos. O ensino explícito de aspectos metacognitivos poderá levar a um bom desempenho em resolução de problemas por parte dos alunos (Vale, 1997; NCTM, 2008). E a investigação é clara em mostrar que um indivíduo torna-se melhor resolvedor de problemas se resolver muitos problemas durante muito tempo.

Reys e colaboradores (2004), acrescentam ainda que a repetição de exercícios conduz a um tratamento superficial da matemática e a uma falha tanto na estimulação dos interesses como na constituição de desafios para os alunos. É a exploração dos conceitos matemáticos através do estabelecimento de relações que conduz as crianças a desenvolverem o raciocínio matemático, mais do que colocá-las a decorar fórmulas. Vale (1997), refere que os alunos portugueses são pouco confrontados com problemas e com actividades nas quais tenham um papel activo no desenvolvimento das suas concepções.

Contudo, não são as operações que distinguem os problemas entre si. Existem problemas de diferentes níveis que mobilizam a mesma operação, existem problemas diferentes que necessitam de duas operações diferentes e têm diferentes níveis de dificuldade (Fayol, 1996). A estrutura dos problemas, os verbos utilizados, a posição da formulação da pergunta, as grandezas numéricas, a ordem de apresentação dos números, a posição da incógnita, podem interferir no procedimento de resolução (Fayol, 1996; Fayol *et al*, 2005).

As situações problemáticas constituem então um desafio para os alunos, onde são, frequentemente, utilizadas várias estratégias e métodos de resolução (M. E., 2001). Os algoritmos das operações aritméticas elementares não podem ser apenas “contas de papel e lápis”, porque quando a aprendizagem é um treino de uma habilidade a aprendizagem é pouco significativa (M. E., 2004; Ponte e Serrazina, 2000).

Para Fayol e colaboradores (2005), quem tem a tarefa da formação das crianças depara-se com vários problemas. Por um lado tem de entender a experiência das crianças fornecendo-lhes a ocasião de construir ou afinar “micromundos” nos quais se associam conhecimentos declarativos e processuais e as suas condições de desencadeamento. Por outro, através de situações significativas, têm de conduzir as crianças à elaboração de algoritmos para, a pouco e pouco, automatizá-las após estar assegurada a sua compreensão. Têm ainda de conceber situações susceptíveis de incitar, e até mesmo obrigar, as crianças a coordenarem, através de uma estrutura de controle mais abstracta, diferentes “micromundos”. Assim, o professor desempenha um papel fundamental na selecção dos problemas e das tarefas matemáticas. No ensino da matemática esta selecção, feita a partir dos materiais didácticos disponíveis, revela-se uma tarefa muito complexa pois o professor tem de conseguir antecipar as ideias matemáticas que as crianças já possuem de modo a levá-las a atingir os objectivos de aprendizagem definidos (NCTM, 2008).

O conceito de número e a resolução de problemas nos manuais

Como vimos anteriormente, a resolução de problemas enquanto processo de aprendizagem favorece a aquisição infantil da noção de número e das operações. De seguida iremos referir alguns estudos que analisaram como os manuais escolares de matemática abordam estas noções.

Segundo a literatura, o meio privilegiado de expressão dos currículos, muitas vezes, dá-se pela “voz” dos manuais escolares (Morgado, 2004), na medida em que estes seleccionam o conhecimento útil que os alunos aprendem na escola, tendo por base os Programas das Disciplinas. Apesar da literatura evidenciar a resolução de problemas no ensino/aprendizagem, apesar do Currículo colocar a ênfase na resolução de problemas, existem estudos que mostram que os manuais ainda não dão a devida relevância a estes (Jitendra *et al*, 2005; Toluk e Olkun, 2002; Silva, 2006; Silva, 2009).

Toluk e Olkun (2002), num estudo acerca de análise de manuais escolares de matemática turcos, afirmam que, raramente, os problemas são utilizados para introduzir conceitos ou um procedimento, aliás, são mesmo utilizados depois de ser introduzido um novo conceito, e são mais utilizados para a aplicação de algoritmos e regras. Apontam ainda que, apenas uma pequena percentagem de problemas podem ser classificados como tal, acabando por cair na categoria de exercícios ou questões. Esta visão limitada pode dificultar o desenvolvimento da aptidão dos alunos para a resolução de problemas, já que podem não ter oportunidade de desenvolverem as suas próprias estratégias (Toluk e Olkun, 2002).

Jitendra e colaboradores (2005), desenvolveram um estudo onde avaliaram 5 manuais de matemática do 3º ano dos EUA, que eram representativos dos manuais adoptados pelas escolas desse país, baseando-se nos objectivos *Standards* para o ensino da matemática, a saber: resolução de problemas, inferir, comunicar, relacionar e representar conteúdos matemáticos. Das conclusões que retiraram é de realçar as seguintes: os manuais apresentam mais variações entre eles do que seria de esperar em relação aos *Standards*; ainda que a resolução de problemas estivesse presente a maioria das vezes, o mesmo não acontece para as inferências e para o estabelecimento de relações que apenas surgiam em menos da metade das vezes (Jitendra, et al., 2005).

Numa investigação portuguesa acerca da análise do número racional em quatro manuais escolares do 5º ano de escolaridade, Silva (2009) conclui que a grande maioria das tarefas apresentadas têm uma exigência cognitiva que apela à reprodução de conhecimentos, tendo as tarefas de reflexão muito menor expressão. Também, para estes manuais, a predominância do contexto em que surgem essas tarefas é caracterizado por Silva (2009), como um contexto puramente matemático em detrimento dos contextos de vida real.

De uma análise aos problemas de adição/subtracção, presentes nos cinco manuais escolares, do 2º ano de escolaridade, mais utilizados nas salas portuguesas, Silva (2006), concluiu que a proporção entre o número de exercícios e de problemas é muito diminuta, sendo que é dada maior relevância ao treino de algoritmos do que à resolução de problemas. Percebe-se ainda que, nos manuais analisados existe prevalência de uma determinada categoria de problemas. Na sequência destas conclusões, surge uma outra que pretende associar as características dos manuais ao desempenho das crianças na resolução de diferentes tipos de problemas. Ainda que os dados não sejam claramente conclusivos, parecem ir ao encontro do que a literatura aponta: existe uma tendência para que as crianças resolvam melhor problemas de uma categoria com que já estejam familiarizadas (Silva, 2006).

Estes dados, levam-nos a reflectir sobre a pertinência de averiguar o contexto de sala de aula, ou seja, de como é que o professor utiliza o manual, introduz os conceitos matemáticos, nomeadamente da noção de número e das operações, e leva os alunos a desenvolverem o seu raciocínio matemático.

O manual dentro da sala de aula

Os aspectos referidos na secção anterior levam-nos a reflectir sobre a discrepância que pode existir entre os objectivos do ensino e o meio utilizado para o implementar. Para muitos professores os manuais escolares são encarados como instrumentos de trabalho auxiliares da prática pedagógica e um meio facilitador da aprendizagem dos alunos. Para outros, os manuais escolares são intérpretes privilegiados das fidelidades e das infidelidades curriculares, já que reúnem as propriedades pedagógicas necessárias para que os alunos desempenhem o seu papel, quer na escola quer em casa (Morgado, 2004; Ponte e Serrazina, 2004).

Já que a aprendizagem é um processo de construção pessoal e social, que não pode ser determinado à priori, de um modo linear e rígido, sob pena de produzir efeitos muito perversos e contrários ao que a educação deve ter, Morgado (2004), defende que os manuais escolares estimulem o papel dinâmico e interventivo que os alunos devem ter na construção do seu próprio saber.

Morgado (2004) enfatiza ainda a existência de alguns manuais escolares que não têm em conta as diferentes formas e ritmos de aprendizagem dos alunos, a que se associam a falta de experiências interdisciplinares e globalizadoras, a não mobilização de experiências e conhecimentos que os alunos já possuem, a ausência de contraste entre os conhecimentos abordados e a realidade em que os jovens se inserem, e a falta de incentivos à sua curiosidade e iniciativa. Assim, pode constituir-se uma tarefa descomunal, esperar que os alunos abandonem as suas próprias ideias e aceitem outras com base na autoridade do texto.

As actividades desenvolvidas dentro da sala de aula são maioritariamente orientadas a partir do manual adoptado; estes constituem uma referência para o ensino e a principal fonte de informação para os alunos. Reys e colaboradores (2004), consideram que isto pode ser mais característico no ensino da matemática do que noutras disciplinas. Nalgumas escolas dos Estados Unidos da América, a única expressão do currículo que existe dentro das salas são os manuais escolares. Segundo Jitendra e colaboradores (2005), os manuais servem como meios cruciais para a aquisição de conhecimento na escola e podem substituir o discurso do professor enquanto fonte primária de informação.

Os professores usufruem de autonomia e responsabilidades para organizarem a sua prática pedagógica como melhor entenderem (Morgado, 2004). Assim, espera-se uma prática quotidiana dentro de sala de aula contrária ao papel meramente técnico do professor que se limita a debitar conteúdos curriculares propostos para uma determinada disciplina. Morgado (2004) vai ainda mais longe, questionando se os manuais não são autênticos armazéns de respostas que os professores administram quando julgam mais conveniente, ao valorizarem essencialmente a transmissão de conhecimentos, a prossecução de objectivos previamente delineados e ao privilegiarem mais os produtos que os processos educativos.

Estudos acerca das práticas dos professores portugueses mostram que, por um lado, estas são marcadas pelo recurso a exercícios, seguidas dos problemas, e por outro, que o manual é um dos recursos mais utilizados (Ponte e Serrazina, 2004). Assim, os manuais exercem uma função reguladora das actividades que se desenvolvem na sala de aula, e que estes por sua vez traduzem o currículo, já que são construídos a partir do que é definido como as competências essenciais a adquirir para o ano de escolaridade que servem (Moreira *et al*, 2006).

Diversos estudos desenvolvidos durante a formação inicial dos professores mostram que uma formação centrada na resolução de problemas é essencial para se ter professores que centram a sua pedagogia na resolução de problemas. Se os professores passarem, enquanto alunos, por um processo de aprendizagem em resolução de problemas, é mais provável que venham a ensinar a resolução de problemas aos seus alunos, já que para além de adquirirem os conhecimentos necessários, adquirem também a confiança e o gosto pela tarefa (Serrazina, 1999).

METODOLOGIA

De seguida serão explicitados os procedimentos que foram levados a cabo de forma a analisar a proporção de problemas em relação ao número de exercícios aditivos e subtractivos, e as categorias de problemas aditivos e subtractivos que estão presentes no manual de Matemática do 2º ano de escolaridade, do 1º Ciclo do Ensino Básico – *Amiguinhos*, da Texto Editora.

Análise do manual *Amiguinhos*

A escolha deste manual prende-se com o facto de o mesmo ser um dos cinco manuais mais escolhidos pelas Escolas portuguesas para a disciplina de Matemática, para o 2º ano de escolaridade, e por ser um dos manuais em utilização por um dos professores que colabora com a investigação anteriormente referida. Assim, analisou-se o manual supra citado face a três aspectos: à proporção de problemas em comparação com o número de exercícios aditivos e subtractivos; às categorias de problemas de adição e subtracção, identificando também a posição da incógnita.

Através do processo simples de contagem, foi registado o número de exercícios de adições e de subtracções que o manual supracitado apresenta, desde os exercícios que remetiam para a decomposição de números; passando por aqueles em que se procurava estabelecer comparações (as crianças tinham de colocar os sinais de maior, menor ou igual) e tinham de efectuar as operações de adição e de subtracção (por exemplo, 3+4 □ 6 ou 5-2 □ 3+1); até aos que continham as duas operações ou exercícios simples de adição e de subtracção.

De modo a analisarmos as categorias de problemas de adição e de subtracção presente no manual em estudo recorreu-se à tipologia de problemas de adição e de subtracção de Riley, Greeno e Heller (1983). Esta classificação organiza os problemas quanto às suas características semânticas, às operações e à identidade do elemento desconhecido. Deste modo temos quatro grandes tipos de problemas: de *mudança*, de *combinação*, de *comparação* e de *igualdade*.

Os problemas do tipo de *mudança* implicam, todos, a ocorrência de pelo menos uma transformação "temporal" aplicada a um estado inicial que resulta (ou tendo resultado) num estado final. Esta categoria possui três tipos, visto que a incógnita concerne o estado final, a transformação ou o estado final. A transformação (e não a operação) pode ser aditiva ou subtractiva. Os problemas de *combinação* dizem respeito a situações estáticas e não a transformações. Pode tratar-se, segundo o caso, ou da pesquisa de um total, ou de um estado inicial. Na categoria seguinte, tem de se *comparar* quantidades estáticas apresentadas com a ajuda de fórmulas do tipo "mais de/menos de". Tal como os problemas de tipo de mudança, tem-se relação com uma organização subjacente que leva a calcular ora o conjunto de chegada, ora o de partida, ora o operador. Por fim, os problemas de *igualdade* têm um estatuto intermediário entre os problemas de tipo comparação – devido ao carácter "estático" das situações mencionadas – e os do tipo mudança – em consequência da transformação implicada.

Assim, segundo um processo metodológico de análise de conteúdo, contabilizaram-se os problemas de adição e de subtracção existentes no manual *Amiguinhos*. Depois ainda se averiguou como se caracterizavam os problemas aditivos e subtractivos no manual em relação à variável posição da incógnita. Como a literatura nos diz, as crianças têm mais dificuldade em resolverem problemas cujo estado inicial é desconhecido, isto quando são problemas que implicam *mudança*. Já nos problemas de *comparação*, por exemplo, as crianças resolvem mais facilmente os problemas quando têm de encontrar o total (Riley *et al*, 1983). Com esta análise pretendemos analisar o grau de dificuldade dos problemas aditivos e subtractivos do manual escolar em estudo. Contabilizaram-se então, para as categorias de problemas, a posição da incógnita, da seguinte forma: *combinação* (categoria I), existem duas hipóteses de incógnita, encontrar o total ou um dos estados iniciais; *mudança* (categoria II), a incógnita pode ser encontrar o estado final, a transformação ou o estado inicial. Não surge a categorização das restantes categorias de problemas porque não existem problemas destas categorias no manual analisado.

RESULTADOS

Iremos agora apresentar os resultados encontrados na análise do manual *Amiguinhos* quanto à proporção de exercícios aditivos e subtractivos e de problemas; quanto ao tipo de exercícios de adição e subtracção; quanto ao tipo de problemas aditivos e subtractivos e à posição da incógnita.

Em relação à percentagem de exercícios podemos observar que existe uma grande predominância de exercícios em detrimento dos problemas (Quadro 1).

Quadro 1. Percentagem de problemas em relação à totalidade de exercícios que requerem as operações de adição e de subtracção.

N Exercícios	N Problemas	NP/NE%
755	15	1,99%

N – Número; NE – Número de Exercícios; NP – Número de Problemas

Constatou-se que os exercícios presentes no manual escolar, em estudo, são de 4 categorias diferentes, a saber: adição; subtracção; mistos (com adições e subtracções); decomposição/composição. É de realçar a ausência, neste manual, de exercícios de comparação, em que as crianças têm de colocar os sinais de >, < ou =, depois de efectuarem operações de adição ou de subtracção (Quadro 2). Verificamos, ainda, que mais de 50% dos exercícios são exercícios de adição, logo seguidos dos exercícios de subtracção.

Quadro 2. Frequência e percentagem de exercícios de adição e de subtracção presentes no manual.

	Adição	Subtracção	Ad.+Subt.	Decomp./Comp.	TOTAL
Freq.	440	204	50	61	755
%	58,28	27,02	6,62	8,08	100

Quanto ao tipo de problemas podemos verificar que no manual em análise não existem problemas das categorias de *comparação* e *igualdade*. Apenas apresenta duas categorias de problemas, são elas: *combinação* (Cat. I) e *mudança* (Cat. II) (Quadro 3).

Quadro 3. Frequência e percentagem de problemas por categoria presentes no manual.

	Cat.I	Cat.II	TOTAL
Freq.	11	4	15
%	73,3	26,7	100

Categoria I – Combinação; Categoria II – Mudança.

A análise dos problemas existentes no referido manual, quanto à posição da incógnita mostra-nos que grande parte dos problemas de *combinação*, remetem para encontrar o total, enquanto que para todos os problemas de *mudança* a incógnita situa-se na procura do estado final (Quadro 4).

Quadro 4. Frequência e percentagem de incógnitas por categorias de problemas no manual.

Posição da incógnita	*Combinação (Cat_ I)*		*Mudança (Cat_II)*	
	Freq.	%	Freq.	%
Estado Inicial	2	13,3		
Total	9	60		
Estado Inicial			-	-
Transformação			-	-
Estado Final			4	26,7
TOTAL *(15)*	11	73,3	4	26,7

CONCLUSÃO

As primeiras concepções infantis de adição e de subtracção centram-se nos aumentos e diminuições das quantidades que acontecem por se actuar sob estas da mesma forma, ou seja, por ganho, compra ou consumo, perda, por exemplo. A única forma de elas alterarem estas concepções é serem confrontadas com situações que entrem em conflito cognitivo com os seus modelos conceptuais. Uma forma eficaz disto acontecer é pô-las a resolverem, com regularidade, diferentes categorias de problemas. Sabemos que a correspondência entre a operação numérica e a estrutura da tarefa não é simples, numa mesma categoria de problemas existem várias possibilidades de problemas que remetem para operações distintas (Riley *et al*, 1983; Vergnaud, 1997). Através da exploração de diferentes categorias de problemas, as crianças conseguem adquirir as concepções correctas destas operações.

Não é o dinamismo da situação implicada que determina a facilidade com que as crianças resolvem os problemas. São as relações entre os elementos em jogo num determinado problema que dificultam ou facilitam a resolução da criança e a forma como ela representa essa relação (Fayol, 1996). Sabe-se que as crianças mais jovens executam processos de resolução que tendem a simular as acções descritas nos enunciados, assim os problemas difíceis de serem transformados em actos revelam-se significativamente mais difíceis de serem resolvidos, pelos seus esquemas de resolução.

Por isso, a passagem da utilização destes esquemas de resolução idiossincráticos para o recurso aos algoritmos de adição e de subtracção pode dar-se através do aumento das quantidades dos problemas de forma a tornar difícil a utilização de objectos ou desenhos para chegar à solução. Desta forma, as crianças tendem a aplicar a regra implícita de escolher a operação adequada para encontrarem a solução para o problema.

Existe uma *décalage* incontestável entre o que a literatura testemunha acerca da resolução de problemas e o que é veiculado pelo manual. O número de problemas de adição e de subtracção presentes no manual em análise é infimamente mais pequeno do que o número de exercícios de adição e de subtracção. Existe uma clara tendência no manual em estudo, para uma valorização dos instrumentos de resolução em detrimento do processo de resolução, que parece surgir mais como contexto de aplicação dos primeiros, ou seja, os problemas surgem depois de serem abordados os aspectos ligados aos algoritmos. A resolução de problemas no manual em estudo é encarada mais como um elemento para treino dos algoritmos. Podemos, então, concluir que o manual escolar de Matemática, *Amiguinhos*, da Texto Editores, do 2º ano de escolaridade, sob o ponto de vista da resolução de problemas, apresenta contextos pouco favorecedores da compreensão infantil das operações de adição e de subtracção.

Por último, recolocamos a nossa pretensão de, no futuro, continuar esta investigação respondendo a questões que nos dêem uma maior compreensão acerca do modo como os manuais medeiam as actividades pedagógicas desenvolvidas dentro da sala de aula.

REFERÊNCIAS

Brissiaud, R. (1989). *Como as Crianças Aprendem a Calcular.* Lisboa: Instituto Piaget.

Brocardo, J. e Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina e I. Rocha (Eds.), *O Sentido do Número: Reflexões que Entrecruzam Teoria e Prática (Cap. 8, pp.97-115).* Lisboa: Escolar Editora.

Castro, R. V. (1999, Novembro). *Já agora, não se pode exterminá-los? Sobre a representação dos professores em manuais escolares de português.* Comunicação apresentada no I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares, "Manuais Escolares - Estatuto, Funções, História", Braga (reimpressão em R. V. Castro, A. Rodrigues, e J. L. Silva (Ed.), *Manuais Escolares - Estatuto, Funções, História* (p. 189-196). Braga: Universidade do Minho, 1999).

Fayol, M. (1996). *A Criança e o Número: Da Contagem à Resolução de Problemas*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Fayol, M., Theveno, C. e Devidal, M. (2005). Résolution de problème/Résolution de problèmes arithmétiques. In M-P. Noël (Ed.), *Aproche Neuropsychologique et développementale des Difficultés de Cacul Chez L'Enfant.* Marseille: Editions Solal.

Jitendra, A., Grifin, C., Deatline-Buchman, A., Dipipi-Hoy, C., Sczesniak, E, Sokol, N., e Xin, Y. (2005). Adherence to mathematics professional standards and instructional design criteria for problem-solving in mathematics. In *Council for Exceptional Children, 71 (3),* 319-337.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2004). *Organização Curricular e Programas do Ensino Básico – 1º Ciclo* (ed. rev.). Mem Martins: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Moreira, D., Ponte, J. P., Pires, M. V. e Teixeira, P. (2006). *Manuais escolares: Um ponto de situação.* Texto de apoio ao grupo de discussão – Manuais Escolares, XV EIEM.

Morgado, J. C. (2004). *Manuais Escolares: Contributo Para Uma Análise.* Porto: Porto Editora.

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (2ª Ed.). Lisboa: APM.

Nathan, M. J., Long, S. D., e Alibali, M. W. (2002). The symbol precedence view of mathematical development: a corpus analysis of the rhetorical structure of textbooks. In *Discourse Processes, 33 (1),* 1-21.

Ponte, J. P., e Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. e Serrazina, L. (2004). Práticas Profissionais dos Professores de Matemática, *Quadrante,* XIII(2), 51-74.

Reys, B. J., Reys, R. E., e Chávez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. In *Educational Leadership, 61 (5),* 61-66.

Riley, M. S., Greeno, J. G., e Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (Cap. 4, pp. 153-196). New York: Academic Press.

Serrazina, L. (1999). *Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em matemática num contexto de reformas curriculares no 1º Ciclo*. Consultado em 25 de Outubro de 2006 através de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fp/textos%20_p/99-serrazina.doc

Silva, C. S. (2004). O estado dos manuais escolares de Matemática em Portugal. In *Educação e Matemática, 80*, 46-50.

Silva, M. J. (2006). *Os Problemas de Adição e de Subtracção nos Manuais Escolares do 2º Ano de Matemática*. Tese de Mestrado, Instituto Superior de Psicologia Aplicada.

Silva, F. (2009). *O Número Racional em Manuais Escolares Portugueses.* Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Toluk, Z., e Olkun, S. (2002). Problem solving in Turkish mathematics education : Primary school matematics textbooks. In *Educational Sciences: Theory & Practice, 2 (2),* 579-581.

Vale, I. (1997). Desempenhos e concepções de futuros professores de matemática na resolução de problemas. In D. Fernandes, . Lester, A. Borralho e I. Vale (Eds.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática. Múltiplos Contextos e Perspectivas.* Aveiro: GIRP.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes, e P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics. An Interactional Perspective*. Hove: Psychology Press, Publishers.

Vilela, M. E. (1991). Análise de manuais escolares. In *Ler Educação, 6,* 75-81.

Yakhontova, T. (2001). Textbooks, contexts, and learners. In *English for Specific Purposes, 20,* 397-415.

O feedback em relatórios escritos na aula de Matemática

Sílvia Semana
Escola Secundária de S. Pedro da Cova, Projecto AREA
Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, CIE, Projecto AREA

RESUMO

Este estudo tem por objectivo caracterizar o feedback fornecido no contexto de elaboração de seis relatórios escritos, no 8.º ano de escolaridade em Matemática, ao longo de um ano lectivo. Seguindo uma metodologia interpretativa, os dados recolhidos, essencialmente através de recolha documental, foram analisados com base num sistema de categorias sustentadas no enquadramento teórico. Os resultados obtidos sugerem a existência de um padrão no feedback fornecido: o feedback incide especialmente no processo de resolução da tarefa ou na auto-regulação pelos alunos, não inclui juízos de valor, nem corrige o erro, mas promove a reflexão e incentiva os alunos a completarem/melhorarem o seu trabalho, fornecendo ou não pistas, colocadas muitas vezes sob a forma de questões. Apesar do padrão tendencialmente regulador, algum do feedback consistiu em simples chamadas de atenção e assinalou o erro. Isto evidencia a grande complexidade da tarefa de dar feedback e sugere a necessidade de o professor incorporar na sua prática as orientações teóricas, ao mesmo tempo que reflecte sobre o feedback que fornece e os seus efeitos na aprendizagem dos seus alunos.

A avaliação reguladora das aprendizagens é uma construção social que implica a participação activa dos vários actores envolvidos e não se limita a medir ou descrever, mas procura intervir para melhorar (Guba e Lincoln, 1989; Hadji, 1994; Pinto e Santos, 2006). É uma avaliação interactiva, centrada nos processos cognitivos dos alunos e associada ao feedback (Black e William, 1998; Gipps, 1999; Santos, 2008; Stiggins, 2004). Procura apoiar e orientar a aprendizagem dos alunos e, ao mesmo tempo, envolvê-los na auto-regulação do seu próprio trabalho (Black e Wiliam, 2006; Fernandes, 2006; Santos, 2008; Wiliam, 2007). Pressupõe, portanto, uma adequação intencional, sistemática e individualizada das situações didácticas e das acções, tanto do professor como do próprio aluno, no sentido de melhorar a aprendizagem (Nunziati, 1990; Pinto e Santos, 2006).

Vários estudos evidenciam que a concretização de uma avaliação desta natureza pode melhorar significativamente o desempenho escolar dos alunos (Black e Wiliam, 1998; Wiliam e Thompson, 2007). Note-se, contudo, que a prática diária de avaliação na sala de aula parece relativamente rara (Black e Wiliam 1998) e que a avaliação, muitas vezes levada a cabo como reguladora, poucas vezes contribui, de forma efectiva, para a aprendizagem dos alunos (Shepard, 2007).

Nesta concepção de avaliação, o feedback revela-se um conceito central (Black e Wiliam, 1998), na medida em que, enquanto forma de comunicação entre professor e alunos, é uma condição necessária à regulação das aprendizagens (NCTM, 1995).

É neste contexto que emerge o presente estudo, cujo objectivo principal é estudar o feedback fornecido no contexto de elaboração de seis relatórios escritos, no 8.º ano de escolaridade, ao longo de um ano lectivo. Em particular, procurou-se responder às seguintes questões:

Como se caracteriza o feedback fornecido em cada um dos relatórios?

Como evolui o feedback ao longo do ano lectivo?

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste estudo, a auto-regulação é entendida como um processo de metacognição, através do qual o aluno toma consciência dos diferentes momentos e aspectos da sua actividade cognitiva e exerce um auto-controlo consciente e crítico sobre as suas acções (Santos, 2002). É um processo interno ao próprio sujeito que lhe permite regular o seu pensamento e a sua aprendizagem (Nunziati, 1990). Este processo inclui monitorização e acção: o aluno confronta o que fez com o que era esperado que fizesse, percepcionando diferenças, e uma segunda fase, em que o aluno age de forma a reduzir ou eliminar essas diferenças (Sadler, 1989; Santos, 2008). Nesta perspectiva, a auto-regulação é essencial para uma efectiva aprendizagem (Black e Wiliam, 1998).

Vários autores reconhecem ao feedback possibilidades na regulação das aprendizagens. Sadler (1989), por exemplo, confere ao feedback um papel decisivo na aprendizagem, enquanto Gipps (1999) considera-o como um elo primordial entre a avaliação e a aprendizagem. Porém, é importante notar que o feedback não é sinónimo de regulação pedagógica. A investigação confirma que o feedback só será verdadeiramente regulador se for usado pelos alunos para melhorar a sua aprendizagem e evidencia que o feedback pode inclusive piorar o desempenho dos alunos (Wiliam, 2007).

Visto que nem todo o feedback tem as mesmas características e potencialidades, é importante distingui-lo, em especial, quanto à sua natureza. Gipps (1999) identifica dois tipos de feedback: o *feedback avaliativo* e o *feedback descritivo*. O primeiro baseia-se sobretudo na formação de juízos de valor e tem poucos efeitos de natureza reguladora; o segundo está relacionado com o desempenho dos alunos face às tarefas propostas. A autora subdivide ainda este último tipo de feedback, distinguindo: (a) o *feedback especificando o progresso*, em que o professor detém o controlo e o poder, identifica os conhecimentos e processos utilizados e faz apreciações dos trabalhos dos alunos, dizendo-lhes o que deve ser feito no sentido de melhorarem e (b) o *feedback construindo o caminho seguinte*, em que a avaliação do trabalho é feita em conjunto com o aluno, discutem-se formas de progressão e utilizam-se estratégias que incentivam a auto-regulação. Neste tipo de feedback o professor partilha o poder e a responsabilidade com o aluno e transmite a sensação de trabalho em progresso, encorajando a percepção e a reflexão sobre as tarefas realizadas. Ao ser-lhe atribuído maior controlo e responsabilidade, o aluno tende a envolver-se mais profundamente na sua aprendizagem (Gipps, 1999).

Para que o feedback seja eficaz é desejável que se enquadre neste último sub-tipo. Não deve, portanto, incluir a identificação nem a correcção do erro, mas antes questionar e apontar pistas de acção futura, de modo a que seja o aluno a consegui-lo (Santos, 2002). Nesse sentido, o feedback deve focar-se naquilo que é preciso ser feito para melhorar e dar indicações sobre o modo como o aluno pode proceder (Wiliam, 2007). Devem ser os próprios alunos a validar e corrigir raciocínios e processos e a chegar às respostas correctas (Santos, 2008). Se assim for, as aprendizagens serão, tendencialmente, mais duradouras (Jorro, 2000). Por outro lado, para que seja útil, o feedback deve acontecer de forma continuada, promover uma atitude de reflexão e auto-avaliação nos alunos, sem incluir juízos de valor (Black *et al.*, 2003; Wiliam, 2007).

Relativamente ao foco do feedback, Hattie e Timperley (2007) distinguem quatro níveis de incidência: o aluno, a tarefa, o processo e a auto-regulação. No primeiro nível, o feedback é pessoal, na medida em que é dirigido ao *self* e muitas vezes não relacionado com o desempenho do aluno na tarefa. No segundo nível, o feedback refere-se a uma tarefa ou produto, indicando se o trabalho está a ser desenvolvido de forma adequada e se as respostas estão correctas ou incorrectas. Este tipo de feedback pode incluir indicações para os alunos procurarem mais informação, informação diferente ou informação correcta. Este é o tipo de feedback mais comum, correspondendo a cerca de 90% das questões dos professores (Airasian, 1997 *in* Hattie e Timperley, 2007). No terceiro nível, o feedback incide sobre o processo usado para elaborar um produto ou completar uma certa tarefa. Este tipo de feedback foca o processamento de informação ou os processos de aprendizagem necessários para a compreensão ou a completude de uma tarefa. No quarto nível, o feedback preocupa-se com a capacidade de os alunos auto-avaliarem o seu trabalho e se envolverem mais profundamente na realização da tarefa. Este tipo de feedback pode ter implicações importantes nas capacidades de auto-regulação e de auto-estima dos alunos.

Dos quatro tipos de feedback, o dirigido directamente ao aluno parece o menos eficaz. Este feedback geralmente assume a forma de elogios que raramente se relacionam com a tarefa, o processo de resolução ou a auto-regulação do trabalho e, por isso, revelam-se ineficazes na promoção de aprendizagens. Nestas situações, os alunos têm um maior receio de errar, evitam correr riscos e minimizam o seu esforço. Quer o feedback dirigido ao processo quer o dirigido à auto-regulação revelam-se bastante poderosos para o desenvolvimento e a compreensão das tarefas, pelos alunos. O primeiro é mais eficaz quando ajuda os alunos a rejeitar hipóteses erradas e fornece pistas que permitem aos alunos compreender e desencadear estratégias para a realização da tarefa em causa, mas também desejavelmente para prosseguir em direcção a tarefas mais desafiantes e a novos objectivos. O feedback dirigido à auto-regulação revela-se poderoso, na medida em que incentiva os alunos a comprometerem-se mais com a tarefa, a reflectirem sobre o seu trabalho, bem como a agirem no sentido de o melhorarem. Já o feedback dirigido à tarefa é tendencialmente eficaz se, por um lado, resulta de falsas interpretações e não da falta de compreensão e se, por outro lado, ajuda a reunir informações sobre as hipóteses e ideias erróneas e a conduzir ao desenvolvimento de estratégias eficientes para o processamento e a interpretação do material apresentado (Hattie e Timperley, 2007).

Relativamente à forma sintáctica do feedback, a forma interrogativa parece facilitar a compreensão do conteúdo do feedback pelo aluno, quando usada para promover a reflexão ou para solicitar a melhoria da produção (Bruno, 2006). Contudo, é de assinalar que nem sempre a forma interrogativa contribui para o objectivo previsto, isto é, por vezes os alunos limitam-se a responder à questão sem prosseguirem o seu raciocínio (Santos e Pinto, 2009). A utilização de uma linguagem acessível ao aluno, concreta, contextualizada e directamente relacionada com a produção em causa surge também como uma mais-valia para essa compreensão (Bruno, 2006).

Para além da natureza, do foco e da forma do feedback, há ainda que levar em consideração a quantidade de informação. Ao contrário do que se poderia pensar, mais feedback não é sinónimo de melhor feedback (Wiliam, 2007). É importante dosear a informação a dar, tendo em conta que o feedback não deve fornecer a resposta, mas apenas conter a informação necessária para que o aluno consiga progredir. Na verdade, dar as soluções completas aos alunos inviabiliza oportunidades de aprendizagem (Day e Cordon, 1993, *in* Wiliam, 2007).

O momento em que é fornecido o feedback ao aluno é também um aspecto relevante a considerar. Vários estudos evidenciam que o feedback só deve surgir após os alunos terem tido oportunidade de pensar e trabalhar na tarefa. Se o feedback for dado demasiado cedo, as possibilidades de aprendizagem serão reduzidas (Wiliam, 2007).

A escolha das situações de ensino e aprendizagem a dar feedback é outra dimensão merecedora de atenção. A sua importância prende-se quer com a utilidade do feedback em si, quer com uma questão de ordem mais prática, de viabilização do processo de “dar feedback” ao aluno. Por outras palavras, é importante escolher de forma criteriosa as situações a dar feedback. As situações mais propícias são as que estão em desenvolvimento, para que o feedback possa ser considerado útil pelos alunos, e não foram ainda sujeitas a qualquer tipo de classificação, que dará ao aluno uma perspectiva já acabada e, portanto, sem sentido para qualquer reformulação (Butler, 1998, *in* Wiliam, 2007; Santos e Dias, 2006).

Apesar das recomendações apresentadas, não existe uma receita quanto ao tipo de feedback a fornecer ou à forma como fazê-lo, na medida em que o feedback pode ser diferentemente eficaz, consoante a situação/aluno em causa. Em particular, o mesmo feedback não surte igual efeito em todos os alunos (Bruno, 2006; Santos e Dias, 2006). A tarefa de dar feedback apresenta-se, portanto, complexa e morosa (Gipps, 1999). É um grande desafio para os professores dar um feedback adequado a cada aluno, em cada situação, e que se constitua como uma mais-valia para a aprendizagem dos alunos e para a sua auto-regulação (Wiliam, 2007).

METODOLOGIA

Tendo em consideração o problema do estudo, optou-se por um paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa (Bogdan e Biklen, 1994).

A investigação envolveu uma turma de 8.º ano, constituída por 24 alunos. O feedback em análise foi elaborado por uma professora-investigadora (Boavida e Ponte, 2002), a primeira autora deste artigo, ao longo do ano lectivo 2007/2008, na sequência de seis relatórios escritos produzidos por um grupo de quatro alunos da turma. Os relatórios escritos foram elaborados nas aulas, a partir da realização de tarefas de natureza diversa (duas investigações, dois problemas e dois jogos). Relativamente à estrutura proposta para o relatório, é de salientar a organização em introdução, desenvolvimento e conclusão. As duas primeiras partes foram realizadas em grupo, bem como as tarefas que deram origem aos relatórios, e a última parte foi realizada individualmente e previa a inclusão da auto-avaliação de cada aluno.

Os relatórios escritos foram elaborados em "duas fases", ou seja, os alunos elaboraram uma primeira versão, que foi sujeita a feedback escrito, e, posteriormente, elaboraram uma nova versão, a versão final, tendo por base a produção inicial e o feedback recebido. De notar ainda que, a versão inicial dos relatórios, devolvida aos alunos com o feedback escrito, não apresentou qualquer tipo de classificação. Para a elaboração do feedback procurou ter-se em consideração as recomendações apontadas na fundamentação teórica, enquanto favorecedoras de um feedback mais eficaz.

No início do estudo, dado que a modalidade de relatório adoptada constituiu uma novidade para a turma, procedeu-se à discussão de um guião do relatório e à negociação dos critérios de avaliação, propostos através de uma tabela de indicadores.

A recolha de dados foi feita através da observação participante das aulas de elaboração dos relatórios (Lessard-Hébert, Goyette e Boutin, 2005), da análise das duas versões de cada relatório elaborado pelo grupo participante e da análise do feedback fornecido, bem como de uma reflexão escrita pela professora-investigadora sobre a elaboração desse feedback.

Para a análise dos dados, foi considerada uma grelha de análise do feedback fornecido, relativamente a cinco dimensões: (A) foco; (B) natureza; (C) tratamento do erro; (D) forma sintáctica; (E) dimensão. Para cada dimensão são consideradas várias categorias, de acordo com o apresentado na tabela 1. A grelha de análise utilizada neste estudo (Anexo 1) foi adaptada de uma apresentada por Santos e Pinto (em revisão), que teve por base o quadro teórico apresentado.

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

A análise que a seguir se apresenta recai sobre o feedback fornecido às primeiras versões de cada um dos seis relatórios. Inclui, portanto, a análise do feedback fornecido, ao grupo participante, relativamente à Introdução e ao Desenvolvimento de cada relatório, bem como o feedback fornecido individualmente a cada aluno do grupo, em relação à sua Auto-avaliação. Não foi considerado o comentário geral tecido no final da parte comum de cada relatório. Cada feedback foi analisado e classificado nas dimensões e categorias consideradas, conforme sugerido n Anexo 2.

Na dimensão *Foco*, evidencia-se o facto de nenhum do feedback fornecido incidir directamente sobre o aluno. Em todos os relatórios, o feedback foca, maioritariamente, o processo ou a auto-regulação. "Já provaram que o quadrilátero [EFGH] é um paralelogramo? Devem explicar como podem fazer para terminar a demonstração" é um exemplo de feedback, fornecido no quarto relatório, que incide sobre o processo necessário para os alunos completarem a resolução da tarefa. Os dois exemplos de feedback que se seguem incidem mais especialmente sobre a auto-regulação dos alunos, preocupando-se em incentivar e orientar a auto-avaliação do trabalho desenvolvido por cada aluno:

> [1.º exemplo]
>
> Na auto-avaliação não te deves preocupar em encontrar um nível. É muito mais importante procurares responder às questões seguintes:
>
> Ajudei o grupo no trabalho, ou não? Participei e dei a minha opinião, ou não? De que forma o fiz? Ouvi e respeitei a opinião dos outros, ou não?
>
> Que dificuldades senti?
>
> O que posso melhorar nos próximos trabalhos?
>
> [2.º exemplo]
>
> Procura ainda explicar em que situações tens dificuldade em comparar e fazer corresponder ângulos. O que achas que podes fazer para ultrapassar essas dificuldades?

Uma parte menor do feedback fornecido em qualquer um dos seis relatórios incide sobre o produto. "Porque não explicam em que consiste o jogo e qual o seu objectivo? Assim, a introdução ficará mais completa" é um exemplo de feedback que incide sobre a introdução do relatório, enquanto produto apresentado pelos alunos, e lhes dá indicação que devem incluir mais informação para que o seu trabalho fique mais completo.

Relativamente à dimensão *Natureza*, destaca-se o facto de nenhum do feedback fornecido incluir a formulação de juízos de valor. Não menos relevante é a evolução verificada ao longo dos seis relatórios, no sentido de uma diminuição do número de feedback fornecido sob a forma de meras chamadas de atenção.

A grande maioria do feedback procura incentivar a reflexão pelos alunos. "Isso que aprendeste foi útil para resolver o problema apresentado? De que forma?" e "Quanto ao que aprendeste, não houve mais nada além de descobrir o raio do círculo com o perímetro? A actividade não envolveu outros conhecimentos?" são exemplos de feedback promotor da reflexão, em ambos os casos, relativamente às aprendizagens matemáticas associadas à realização das tarefas propostas. Por diversas vezes, esse feedback, incentivador da reflexão, inclui também pistas orientadoras. O feedback que se segue, além de pretender promover a reflexão sobre uma das principais conclusões obtidas pelo grupo na realização da tarefa, fornece pistas, sobre a forma de questões, que procuram orientar o aluno nessa reflexão e na comunicação da conclusão obtida:

> Não é muito claro o que queres dizer com "temos de ter uma táctica para ganhar ao adversário e começarmos em primeiro lugar". Aprendeste uma táctica para ganhar o jogo? Que táctica foi essa? Deves jogar em 1º lugar ou em 2º?

No que concerne à dimensão *Tratamento do Erro* note-se que nenhum do feedback fornecido ao longo dos seis relatórios assinalou e corrigiu o erro. Existiu, contudo, feedback que assinalou o erro, embora não o corrigisse. Muitas vezes, esse assinalar do erro/falha não é feito explicitamente, como acontece no exemplo seguinte:

> Deves também procurar explicar melhor o que queres dizer no penúltimo parágrafo. Não é muito claro. Se os triângulos fossem sobrepostos tinham que coincidir e não é isso que acontece, pois não? Procura melhorar a tua explicação.

O assinalar do erro de forma mais clara prende-se, geralmente, com erros ortográficos ou incorrecções ao nível da linguagem/notação matemática: "Atenção a alguns erros ortográficos cometidos"; "Atenção à falta de unidades de medida"; "Mais uma vez, atenção à notação matemática! Revejam como se devem referir a um triângulo e a um ângulo e não confundam ângulo com amplitude do ângulo".

Ainda no que se refere ao tratamento do erro, os dados recolhidos sugerem uma ligeira evolução, ao longo dos seis relatórios, no sentido da diminuição da identificação do erro e do aumento dos estímulos à sua correcção. Mais relevante é o facto de a esmagadora maioria do feedback preocupar-se, logo desde o primeiro relatório, em incentivar os alunos a completar/melhorar as suas produções, sugerindo que nenhum trabalho está obrigatoriamente acabado e que pode sempre ser melhorado. Neste estudo, esta situação parece muito relacionada com a natureza da tarefa que está a ser alvo de feedback. Na elaboração de relatórios, além da preocupação com a correcção do processo de resolução da tarefa, também estão presentes, muitas vezes de forma mais proeminente, preocupações ao nível da comunicação e auto-avaliação do trabalho desenvolvido, que conduzem a que seja solicitada a completude ou melhoria do relatório, mesmo quando o trabalho apresentado já está "bem feito". De seguida, apresentam-se dois exemplos de feedback que corroboram esta posição, o primeiro ao solicitar a descrição de uma estratégia não frutuosa inicialmente utilizada pelo grupo na tentativa de resolução da tarefa e o segundo exemplo ao incentivar um aluno a estabelecer e apresentar relações entre o trabalho desenvolvido e algum tópico matemático abordado nas aulas:

> [1.º exemplo]
>
> Antes de pensarem na estratégia que descrevem no desenvolvimento, não pensaram noutra forma de resolver o problema? Que estratégia foi essa? Porque a abandonaram? Se consultarem os critérios de avaliação verificam que a devem apresentar no vosso relatório, embora não seja a estratégia final.
>
> [2.º exemplo]
>
> Procura, também, referir conclusões que resultem do diálogo com os teus colegas, sobre a relação deste trabalho com algum assunto abordado nas aulas de matemática.

Na dimensão *Forma Sintáctica* destaca-se o facto de nenhum do feedback ter assumido a forma simbólica. O feedback fornecido é variado e distribui-se pelas formas afirmativa, interrogativa e mista, com um ligeiro predomínio desta última forma, na totalidade dos seis relatórios. O feedback misto, ao reunir as formas afirmativa e interrogativa, tende, por um lado, a identificar aspectos que devem ser melhorados/completados no trabalho apresentado e, por outro lado, a fornecer orientações/pistas que pretendem ajudar o aluno a consegui-lo:

> Deves desenvolver mais as tuas ideias quando dizes que fizeram um bom trabalho. Porque achas que isso aconteceu? Como decorreu?
>
> Percebeste porque foram traçadas as duas mediatrizes? És capaz de explicar porquê? Se necessário pede ajuda aos teus colegas.

Quanto à *Dimensão* do feedback, varia entre curta e longa, sendo, contudo, visível um maior predomínio do feedback de média dimensão. Nesta categoria, integram-se, em particular, os dois exemplos de feedback apresentados por último. Na elaboração do feedback esteve presente a preocupação de fornecer a informação necessária para que os alunos conseguissem progredir em cada situação particular, mas também a preocupação de não fornecer feedback demasiado extenso que dificultasse a sua compreensão pelos alunos:

> Procurei dar feedback com a quantidade de informação adequada a cada caso (…) Procurei evitar o feedback excessivamente longo, para não criar obstáculos adicionais aos alunos na sua interpretação ou mesmo desmobilizá-los da sua leitura… (Reflexão professora-investigadora).

CONCLUSÕES

Neste estudo, é possível identificar um padrão no feedback fornecido: (i) o feedback incide, maioritariamente, ou no processo necessário para os alunos completarem/melhorarem a resolução da tarefa ou na auto-regulação dos alunos, preocupando-se em fomentar e orientar a auto-avaliação do trabalho desenvolvido (Gipps, 1999; Hattie e Timperley, 2007); (ii) o feedback não inclui juízos de valor e tende a incentivar a reflexão pelos alunos, fornecendo ou não pistas (Black *et al.*, 2003; Wiliam, 2007); (iii) a maioria do feedback não assinala nem corrige o erro (Santos, 2002, 2008) e preocupa-se em promover a completude/melhoria das produções apresentadas, sugerindo que qualquer trabalho pode ser passível de desenvolvimento/melhoria; (iv) o feedback nunca assume a forma simbólica e varia entre as formas afirmativa, interrogativa e mista, com a forma interrogativa a ser usada para promover a reflexão, para solicitar a melhoria da produção ou para fornecer pistas (Bruno, 2006); (v) a dimensão do feedback varia entre curto e longo, com um predomínio do feedback de dimensão média.

Neste estudo, a predominância de determinadas características do feedback parece associada ao contexto/tarefa em que é fornecido (Black e Wiliam, 1998). Tratando-se da elaboração de relatórios escritos em Matemática e tendo em consideração os critérios de avaliação definidos (quer através do guião de relatório, quer pela tabela de indicadores), o feedback preocupa-se, não só com a correcção da resolução da tarefa que deu origem ao relatório, mas também com a comunicação matemática e a auto-regulação, o que conduz a que, frequentemente, o feedback, por um lado, incentive a reflexão e a auto-avaliação do trabalho desenvolvido e, por outro lado, solicite a completude ou melhoria do relatório. Também a dimensão média do feedback pode estar relacionada com o grau de complexidade exigido na elaboração dos relatórios. Por um lado, está presente a preocupação em esclarecer e orientar, mas, por outro lado, procura-se dosear-se a informação a dar, para que o feedback não se torne demasiado longo e se constitua como uma dificuldade acrescida para os alunos (Santos e Pinto, 2009).

Ainda que as recomendações do referencial teórico para a produção de um feedback eficaz tenham sido consideradas, o feedback fornecido nem sempre reuniu as características apontadas como mais adequadas. Em particular, algum do feedback consistiu em simples chamadas de atenção e, embora não corrigisse o erro, assinalou-o, de forma mais ou menos explícita. Ao longo dos seis relatórios, são visíveis pequenas evoluções nestes aspectos, com uma diminuição do feedback que consiste em meras chamadas de atenção e identifica o erro e com uma tendência de aumento do feedback que fornece pistas orientadoras e estimula a correcção do erro, atribuindo-se maior controlo e responsabilidade ao aluno, no sentido de promover um maior envolvimento deste no processo de aprendizagem (Gipps, 1999) e potenciar aprendizagens mais duradouras (Jorro, 2000).

Os resultados obtidos deixam transparecer a complexidade da tarefa de dar feedback (Gipps, 1999) e sustentam que o conhecimento dos fundamentos e orientações de uma escrita reguladora não é suficiente para que a prática de dar feedback seja totalmente condizente com essa teoria. Exige assim, por parte do professor, uma aprendizagem através de uma constante reflexão sobre o feedback que vai dando aos seus alunos e os resultados obtidos em termos dos seus efeitos na aprendizagem (Santos e Pinto, em revisão). Cada professor deve incorporar as orientações teóricas na sua prática e investir comprometidamente na tarefa de dar feedback regulador (Black *et al.*, 2003; Wiliam, 2007).

REFERÊNCIAS

Airasian, P. W. (1997). *Classroom assessment* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.

Black, P. e Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education*, *5*(1), 7–71.

Black, P. e Wiliam, D. (2006). Assessment for learning in the classroom. In J. Gardner (Ed.), *Assessment and learning* (pp. 9-25). London: Sage.

Black, P.; Harrison, C.; Lee, C.; Marshall, B. e Wiliam, D. (2003). *Assessment for learning. Putting in practice.* England: McGraw-Hill.

Boavida, A. e Ponte, J. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bruno, I. (2006). *Avaliação das aprendizagens: O processo de regulação através do feedback – um estudo em Físico-Química no 3º ciclo do ensino básico*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Butler, R. (1998). Enhancing and undermining intrinsic motivation: the effects of task-involving and ego-involving evaluation on interest and performance. *British Journal of Educational Psychology*, *58*, 1-14.

Day, J. D. e Cordon, L. A. (1993). Static and dynamic measures of ability: An experimental comparison. *Journal of Educational Psychology*, *85*, 75-82.

Fernandes, D. (2006). Para uma Teoria da Avaliação Formativa. *Revista Portuguesa de Educação*, *19*(2), 21-50.

Gipps, C. (1999). Socio-cultural aspects of assessment. *Review of Research in Education, 24*, 355-392.

Guba, E., e Lincoln, Y. (1989). *Fourth Generation Evaluation*. Beverly Hills, CA: Sage.

Hadji, C. (1994). *Avaliação, Regras do Jogo. Das intenções aos instrumentos*. Lisboa: Porto Editora.

Hattie, J. e Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112.

Jorro, A. (2000*). L´enseignant et l´évaluation*. Bruxelles: De Boeck Université.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G. e Boutin, G. (2005). *Investigação qualitativa. Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Merrian, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

NCTM (1995). Assessment standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice. *Cahiers Pédagogiques*, *280*, 47-62.

Pinto, J. e Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Sadler, D. R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science*, *18*, 119-144.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes e F. Araújo (Orgs.*), Avaliação das aprendizagens. Das concepções às práticas* (pp. 75-84). Lisboa: ME-DEB.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes e C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: SEM/SPCE.

Santos, L. e Dias, S. (2006). Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback. *Actas do ProfMat2006*. (CD-ROM). Lisboa: A.P.M..

Santos, L. e Pinto, L. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. *Proceedings of the 33rd PME*, 5, 49-56.

Santos, L. e Pinto, J. (em revisão). The evolution of feedback' practice of a mathematics teacher. Research report submetido ao 34th PME.

Shepard, L. A. (2007). Will Commercialism Enable or Destroy Formative Assessment? In C. A. Dwyer (Ed.), *The Future of Assessment: Shaping Teaching and Learning*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Stiggins, R. (2004). New assessment beliefs for a new school mission. *Phi Delta Kappa*, *86*(1), 22-27.

Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1053-1098). Charlotte: Information Age Publishing.

Wiliam, D. e Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? In C. A. Dwyer (Ed.), *The future of assessment: Shaping teaching and learning*. Mahwah, N.J.: Erlbaum.

ANEXOS

Anexo 1. Dimensões e categorias de análise do feedback

A. Foco:	A.1 Aluno A.2 Produto A.3 Processo A.4 Auto-regulação
B. Natureza:	B.1 Formula juízos de valor B.2 Chama a atenção B.3 Incentiva a reflexão B.4 Dá pistas B.5 Incentiva a reflexão e dá pistas
C. Tratamento do erro:	C.1 Assinala e corrige C.2 Assinala, mas não corrige C.3 Não assinala, mas estimula a correcção C.4 Incentiva a completar/melhorar
D. Forma sintáctica:	D.1 Simbólica D.2 Afirmativa D.3 Interrogativa D.4 Interrogativa e afirmativa
E. Dimensão:	E.1 Curto E.2 Médio E.3 Longo

Anexo 2. Distribuição do feedback, em cada relatório, por dimensões e categorias de análise (valores em percentagem, aprox. às unidades)

Relatório		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Total de Feedback		23	31	20	27	22	25
A Foco	A1	0	0	0	0	0	0
	A2	4	16	15	9	9	16
	A3	65	39	65	48	45	32
	A4	30	45	20	37	45	52
B Natureza	B1	0	0	0	0	0	0
	B2	26	19	10	15	5	4
	B3	35	65	25	59	68	52
	B4	9	6	20	19	14	24
	B5	30	10	45	7	14	20
C Tratamento do Erro	C1	0	0	0	0	0	0
	C2	4	13	5	15	0	0

	C3	9	13	5	7	18	12
	C4	87	74	90	72	78	88
D Forma Sintáctica	D1	0	0	0	0	0	0
	D2	22	23	30	22	9	20
	D3	9	10	5	7	18	12
	D4	52	13	40	30	32	24
E Dimensão	E1	22	52	25	26	9	20
	E2	48	48	35	63	77	60
	E3	30	0	40	11	14	20

As histórias e o desenvolvimento do sentido de número no pré-escolar

Ana Rita Serras
Jardim de infância de Alferrarede n.º1
Raquel Vieira
Escola Superior de Educação de Torres Novas

Ao analisarmos as Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar1 (Ministério da Educação, 1997), facilmente podemos observar a importância atribuída à capacidade da comunicação, servindo, inclusive, de título a uma das três Áreas de Conteúdo essenciais contempladas no documento: Área de Formação Pessoal e Social; Área de Expressão/Comunicação e Área de Conhecimento do Mundo.

Pensar no desenvolvimento das capacidades de expressão e comunicação na criança significa fazê-lo de um modo transversal e pluridisciplinar. São os próprios autores do documento que subdividem a Área de Expressão/Comunicação em três domínios: expressão motora, dramática, plástica e musical; linguagem e abordagem à escrita e matemática.

É um facto assumido que a comunicação é uma parte fundamental quando pretendemos analisar quer o processo de ensino quer da aprendizagem, nomeadamente da Matemática. Importância maior assume, ainda, se pretendermos estudar esses processos nos primeiros anos da criança, idade em que a evolução dos processos de comunicação e representação são mais velozes.

Promover actividades que desenvolvam a capacidade de comunicação, ao nível pré-escolar, conduz-nos, pois, a procurar estabelecer conexões entre diferentes áreas disciplinares. Por outro lado, desenvolver competências matemáticas nesta faixa etária leva-nos a reflectir sobre a aquisição das primeiras noções matemáticas, nomeadamente a aquisição do conceito de número.

Algumas das investigações mais actuais, neste contexto, têm alertado para a importância de desenvolver não apenas o conceito de número mas para que esse desenvolvimento, seja adquirido com sentido. Surgindo assim, um termo amplamente utilizado na investigação em educação matemática, *sentido do número*, que pretende ser mais abrangente do que o conhecimento do número, referido nas OCEPE.

[1] Passaremos a referir-nos a este documentos utilizando as iniciais OCEPE.

É neste contexto que este trabalho se enquadra, ou seja, a procura de estratégias que promovam o desenvolvimento do sentido de número nas crianças em idade pré-escolar, utilizando estratégias interdisciplinares, incluindo para o efeito as histórias. Pretende-se, pois, compreender o papel das histórias no desenvolvimento do sentido de número em crianças nesta faixa etária, nomeadamente avaliando o desenvolvimento dos princípios da Correspondência Biunívoca, da Cardinalidade e da Inclusão Hierárquica. Interessam-nos, ainda, aspectos ligados à comunicação matemática e ao raciocínio, capacidades transversais envolvidas em qualquer uma das actividades que se desenvolveram. Assim, o objectivo principal desta investigação consiste em compreender a importância do uso de histórias no contexto do Pré-Escolar, nomeadamente no desenvolvimento do sentido de número nas crianças.

Neste sentido, realizou-se um estudo de caso, constituído por quatro crianças do pré-escolar, de quatro anos, que realizaram actividades diversas sobre os princípios envolvidos no desenvolvimento do sentido de número (correspondência biunívoca, cardinalidade, inclusão hierárquica), sendo que algumas dessas actividades tiveram como ponto de partida a exploração de histórias infantis. Foram utilizadas outras actividades sem recurso a história, como forma de poderem ser comparados os desempenhos das crianças nas actividades.

Na recolha de informação pertinente para análise, foram utilizadas diferentes grelhas de observação directa, durante a realização de cada uma das intervenções; notas de campo; material produzido pelas crianças; gravações por meio de câmara de vídeo e fotos.

Baseando-nos nas considerações feitas ao percurso individual de cada criança, e embora tenhamos em atenção as limitações de um estudo de caso no que se refere à possibilidade de generalizar foi possível constatar que:

Após uma primeira intervenção a noção de conjunto foi algo que as crianças demonstraram adquirida, pois foi a solução que surgiu mais vezes, apesar de nem sempre corresponder à resolução esperada. Um outro aspecto em destaque foi a verificação da importância da utilização da história, por exemplo, nas actividades em que anteriormente tinha sido apresentada uma história, existiram crianças a falar de excertos dela e a dizerem "*tem de ser assim porque na história era assim".*

Numa fase posterior, as crianças revelaram a sua capacidade de *subtize*, alcançado por percepção visual, nomeadamente até ao número quatro, do mesmo modo que demonstraram encontrar estratégias que as ajudassem em situações de contagem mais alargadas.

O princípio da cardinalidade foi outra das noções adquiridas / demonstradas pelas crianças, uma vez que muitas delas revelaram ter a capacidade de compreender que os objectos que se contam dizem respeito a uma quantidade e que o número a que se chega quando se conta representa o montante de um conjunto de objectos (Fosnot e Dolk, 2001).

Em relação à inclusão hierárquica, verificámos que este não se encontrou adquirido na sua totalidade, pelas crianças. Apesar destas já entenderem que os números aumentam um a um, não utilizaram este princípio como ferramenta útil na realização de contagens.

À medida que se sucederam as intervenções, foi notória a evolução das crianças na realização deste tipo de actividades, especialmente na aquisição de novos conceitos como a correspondência biunívoca.

A evolução revelada pelas crianças entre as actividades iniciais e as finais, permitem apontar para o facto das histórias constituírem um contributo substancial na aquisição e desenvolvimento quer do sentido de número, quer das capacidades do raciocínio e comunicação matemática. Estas parecem fornecer-lhes bases para que possam mais facilmente apresentar as suas resoluções, nomeadamente, deixando-as mais abertas a apresentar e explicar o que fizeram, como e porquê, utilizando com frequência exemplos das histórias ouvidas. Assim sendo, a evolução do desempenho das crianças na realização deste tipo de actividades, especialmente na aquisição de novos conceitos, foi verificada, reafirmando a importância da utilização de histórias no contexto pré-escolar.

REFERÊNCIAS

Fosnot, C. e Dolk, M. (2001). Young mathematicians at work: constructing number sense, addition and subtraction. Portswouth. NH: Heinemann.

Ministério da Educação (1997). Orientações Curriculares para o Ensino Pré-Escolar. Lisboa: Departamento da Educação Básica – Núcleo de Educação Pré-Escolar.

Explicar e negociar significados: as concepções e as práticas de uma candidata a professora de matemática

Kátia Maria de Medeiros
Universidade Estadual da Paraíba-Brasil, I.E, Universidade de Lisboa
João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

RESUMO

Este artigo analisa as concepções e práticas de comunicação na aula de Matemática de uma candidata a professora, na fase final da sua formação inicial, nomeadamente nas vertentes de explicação e negociação de significados. O caso apresentado baseia-se em oito entrevistas, uma interpretação de situações de ensino e registos de observações de quatro aulas. Analisamos os motivos da sua escolha profissional bem como as suas concepções e práticas sobre a comunicação na aula de Matemática, nomeadamente a explicação (dela e dos alunos) e a negociação de significados de conceitos matemáticos. O caso revela a importância que atribui à comunicação nas aulas, apresenta as suas concepções e práticas de explicação e de negociação de significados. Nestas práticas, identificamos o modo como aproveita o erro do aluno para fomentar a sua aprendizagem e a importância que dá a apresentação de diferentes soluções para um problema.

A comunicação professor-aluno e entre os alunos na sala de aula nem sempre propicia uma aprendizagem significativa. O excesso de cálculos mecânicos, a ênfase em procedimentos e a própria linguagem, em muitos casos, restringem o alcance da comunicação oral (Lampert e Cobb, 2003). Este artigo constitui um estudo de caso realizado no âmbito de uma investigação mais ampla, cujo objectivo é estudar a comunicação nas aulas de Matemática do candidato a professor ao longo da fase final da sua formação inicial. Neste texto, o problema é saber quais as concepções e práticas de comunicação de Luzia, uma candidata a professora de Matemática, nomeadamente no que se refere à explicação e negociação de significados (Bishop e Goffree, 1986; Frid e Malone, 1994; Leinhardt, 2001). O estudo das concepções e práticas, em simultâneo, deve-se ao facto de se reconhecer que esses dois campos só se podem compreender em ligação um com o outro.

A COMUNICAÇÃO E O CANDIDATO A PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Comunicação na sala de aula. A comunicação matemática tem vindo a ser apontada como elemento importante na actividade da sala de aula (e.g., Bishop e Goffree, 1986; Sfard, 2002; Yackel e Cobb, 1996). Pode ser olhada como um objectivo curricular, ou seja, um conjunto de capacidades a desenvolver pelo aluno (Ponte et al., 2007) ou como um elemento do processo de ensino-aprendizagem, ou seja, um conjunto de aspectos que marcam o modo como se trabalha na sala de aula (Bishop e Goffree, 1986; Lampert e Cobb, 2003; NCTM, 2007; Sfard, 2002; Yackel e Cobb, 1996). A análise da comunicação na sala de aula permite identificar aspectos fundamentais do ensino-aprendizagem, como o papel do professor e do aluno, as concepções de conhecimento de ambos os actores (Brousseau, 1996), as normas sociomatemáticas (Yackel e Cobb, 1996) e o contrato didáctico (Brousseau, 1996; Medeiros, 2001).

Regulação. Para Ponte et al. (2007) a comunicação começa por ser usada como meio de regulação do trabalho na sala de aula. No entanto, a comunicação usada desta forma não se refere directamente à aprendizagem da Matemática. Palavras ou frases no discurso do professor são usadas para pontuar o trabalho na sala de aula, indicando o que há para fazer, marcando a transição de uma tarefa para outra, ou sinalizando algo a que os alunos devem dar especial atenção. Esta regulação pode ser usada para coibir participações perturbadoras e para regular a participação no discurso. Com a regulação, o professor consegue estabelecer uma zona de normalidade, reduzindo ou minimizando os conflitos inerentes à relação pedagógica e garantindo um clima na sala de aula capaz de propiciar a manutenção de um ambiente de trabalho satisfatório.

Explicação. Uma vertente importante da comunicação respeita à explicação de ideias matemáticas. Esta explicação pode ser realizada pelo professor (Bishop e Goffree, 1986; Charalambous, 2009; Leinhardt, 2001) ou pelo aluno (Yackel e Cobb, 1996; Leinhardt, 2001; Levenson et al., 2009). De acordo com Bishop e Goffree, frequentemente, o candidato a professor de Matemática vê *explicar* como equivalente a *dizer*. No entanto, para estes autores, explicar é mais que isso – é um processo sem fim de representar as conexões, as relações entre a ideia que está sendo explicada e outras ideias matemáticas. Para estabelecer essas conexões e melhor se comunicar com os alunos, o candidato a professor pode utilizar metáforas e analogias, pois estes recursos de linguagem, ao surgirem na sua explicação, podem contribuir para que os alunos compreendam melhor os conceitos e procedimentos. As explicações, como sublinha Leinhardt (2001), são frequentemente definidas como respostas à pergunta "por que" em um conteúdo de ensino. A autora considera as explicações de modo mais amplo, isto é, apresenta uma definição ou uma definição aproximada e depois distingue as explicações instrucionais de três outros tipos maiores de explicações. A autora apresenta quatro tipos de explicações: *comuns, disciplinares, auto-explicações* e *instrucionais*.

> As *explicações comuns* são responsáveis por questões directas e usualmente simples (mas por vezes profundas). Estas questões são geralmente convites a uma curta discussão. Tais questões fundamentam-se numa confiança particular entre os interlocutores, isto é, a questão é dirigida a alguém que provavelmente pode responder. A interacção é face-

a-face ou virtualmente, isto é, as trocas não são separadas por uma longa distância geográfica ou temporal (embora possam ocorrer trocas por meio electrónico).

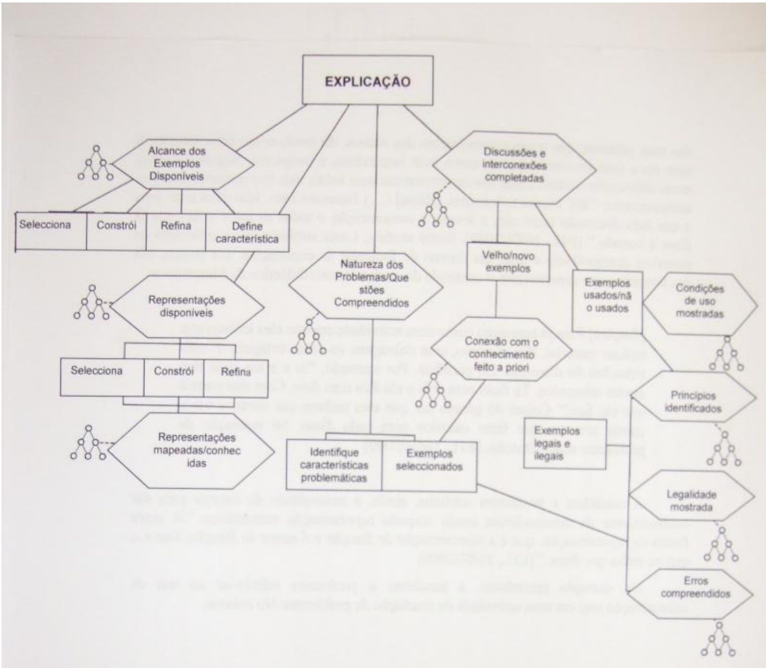
As *explicações disciplinares* contrastam com as comuns, segundo a autora, porque, como o seu próprio nome sugere, emergem de questões inseridas numa disciplina. Estas explicações respondem a questões implícitas e explícitas que existem independentes de tempo e de lugar. Para acomodar a diversidade dos participantes em explicações disciplinares, a forma e a linguagem de tais explicações são algo rígido e ritualizado. A formalização ajuda a apoiar a comunicação na ausência da interacção face-a-face, da voz e do contexto social.

As *auto-explicações,* diferentemente das explicações disciplinares, constituem um mecanismo de aprendizagem. Se as explicações disciplinares deixam a marca da disciplina como uma entidade, as auto-explicações são modos de estabelecer significados, estender ou revisar a compreensão (Leinhardt, 2001). Como o próprio nome sugere, as auto-explicações são elaboradas para a própria pessoa e não para outros.

Para Leinhardt (2001), em contraste com as explicações comuns, disciplinares e auto-explicações, as *explicações instrucionais* são desenvolvidas explicitamente para ensinar. Para a autora, estas explicações são para comunicar alguma parte de um conteúdo de ensino a outro. Na sua perspectiva, estas explicações também podem ser construídas através de um discurso coerente, em torno de tarefas que envolvem a classe-inteira e o professor trabalhando juntos. As explicações instrucionais são naturais e frequentes acções pedagógicas que, como sublinha a autora, ocorrem em resposta a questões explícitas ou implícitas, colocadas pelos alunos ou pelos professores.

O modelo de explicações instrucionais. Leinhardt (2001) apresenta um modelo de explicações instrucionais. Trata-se de um modelo genérico, isto é, que pode ser aplicado a explicações em qualquer disciplina. No entanto, o desenvolvimento e o exemplo é baseado no conteúdo de ensino. O modelo das explicações instrucionais pode ser pensado como um sistema de objectivos interrelacionados (mostrados nos hexágonos da Figura 1), apoiando suas acções (mostrado nos rectângulos) e o conhecimento para encontrar o objectivo de modo bem sucedido (mostrado pela rede de ícones). Em geral, os objectivos são implícitos e não visíveis a um observador, mas eles podem ser inferidos pela interpretação de acções explícitas ou através de entrevistas com os professores e alunos sobre intenções e justificações a respeito do ensino e aprendizagem (Leinhardt, 1993).

Figura 1: Modelo das Explicações Instrucionais (Leinhardt, 2001).



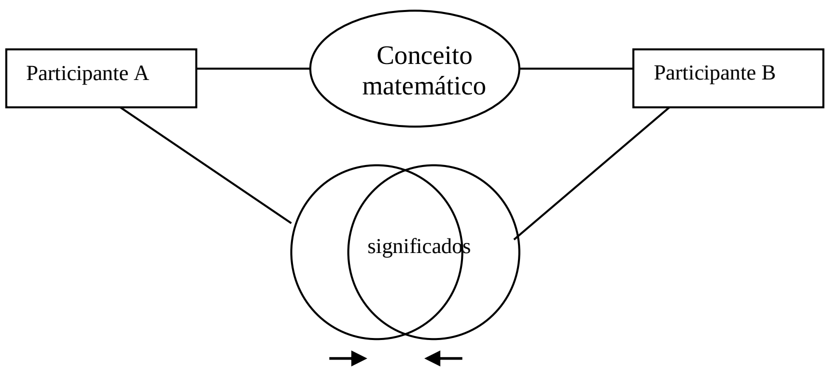
Numa perspectiva interaccionista da sala de aula de Matemática, o aluno também realiza explicações. Segundo Yackel e Cobb (1996) a explicação dos alunos pode ter uma base social em vez de matemática. Com o aumento da participação dos alunos nas aulas de Matemática, de carácter investigativo, leva a diferenciar vários tipos de raciocínio matemático. Eles podem distinguir, por exemplo, entre as explicações que descrevem procedimentos e as que descrevem acções com objectos matemáticos. Esses autores apresentam três aspectos da compreensão dos alunos sobre a explicação. O primeiro é *as explicações que descrevem procedimentos*, o segundo *explicações como descrições de acções sobre objectos matemáticos experiencialmente reais* e o terceiro, *explicações como objecto de reflexões.*

Levenson et al. (2009) também investigaram as explicações dos alunos. Para estas autoras, as explicações dos alunos podem ser *matematicamente baseadas* (MB) ou *praticamente baseadas* (PB). As explicações *matematicamente baseadas* (MB) baseiam-se apenas em definições matemáticas ou propriedades matemáticas aprendidas previamente e usam raciocínio matemático. As explicações *praticamente baseadas (*PB) usam o contexto do dia-a-dia e/ou materiais manipuláveis para "dar significado" às expressões matemáticas. As *explicações instrucionais* referidas acima, segundo Leinhardt (2001), também podem ser desenvolvidas pelos alunos.

Negociação de significados. A Matemática pode ser considerada como uma forma de discurso e este constitui um indicador de aprendizagem matemática. A aprendizagem individual origina-se na comunicação com os outros e é dirigida pela necessidade de ajustarmos o nosso modo discursivo ao de outras pessoas. Como diz Sfard (2002), o lugar da aprendizagem é *entre* as pessoas. Neste sentido, uma interacção que pode emergir na sala de aula é a negociação de significados (Bishop e Goffree, 1986). Trata-se de uma interacção dirigida para um certo objectivo – professor e aluno interagem negociando, durante um certo período, o significado de um conceito matemático. Segundo Frid e Malone (1994), a negociação de significados envolve processos "específicos das interacções em sala de aula, através dos quais professores e alunos conjecturam, criticam, explicam, testam e refinam ideias e procedimentos" (p. 3). A aprendizagem matemática envolve sempre a construção progressiva de um quadro de significados, através do qual o aluno avança na aquisição do conhecimento matemático (Martinho, 2004). Para Bishop e Goffree (1986) a obtenção do significado ocorre através do estabelecimento de conexões entre a ideia matemática nova e os conhecimentos matemáticos que o indivíduo já possui. Estes conhecimentos preexistentes podem não ser apenas matemáticos.

Construir significados envolve um processo de negociação entre os participantes que evolui por aproximações sucessivas. Este processo de aproximação é ilustrado no diagrama abaixo (Martinho, 2004).

Figura 2: Negociação de significados de conceitos matemáticos.



O diagrama mostra que a partilha de significados só pode ocorrer a partir do momento em que eles se tornam explícitos. O professor tem o papel fundamental na explicitação desses significados. Ele pode usar sua autoridade para manter ou impedir a negociação. Neste sentido, os alunos precisam ver a sua autoridade usada positivamente, isto é, estimulando a negociação de significados de conceitos matemáticos (Bishop e Goffree, 1986). Portanto, para a emergência da negociação de significados de conceitos matemáticos na sala de aula, dois aspectos são fulcrais, na prática lectiva do professor: o modo como regula o trabalho nas suas aulas e o modo como explora o erro dos alunos.

> Na sala de aula, diante da polifonia e polissemia entre professor e alunos, quando estes se referem a um conceito matemático, pode ocorrer negociação de significados sobre este conceito. Cobb e Bauersfeld (1995) definem a negociação de significados sucintamente como a realização interactiva da intersubjectividade. Esta afirmação certamente reifica a conexão entre negociação e intersubjectividade. O uso do termo "interactivo" sugere a participação de mais de uma pessoa no processo negocial (localizando o processo no âmbito social).

METODOLOGIA

Esta pesquisa segue uma metodologia qualitativa de cunho interpretativo, baseada em estudos de caso (Yin, 2003). A escolha pelo estudo de caso (Ponte, 2006) deve-se à possibilidade de responder, principalmente, a "como" as candidatas a professora percebem, para as concepções, e como se processam, no caso das práticas, alguns aspectos da comunicação em suas aulas. Neste artigo, o caso em estudo refere-se à candidata a professora Luzia.

Os dados utilizados para a construção do caso apresentado neste artigo foram recolhidos, pela primeira autora, em observações, numa turma do 5.º ano, em quatro aulas. As duas primeiras aulas foram consecutivas. As aulas foram audiogravadas, porque não se obteve autorização dos pais de todos os alunos da turma para videogravá-las. Na primeira aula, foi abordada a adição de números decimais (no cálculo mental), as áreas de figuras planas e os gráficos cartesianos; na segunda aula, números decimais (compreensão destes números através do cálculo mental), área de figuras regulares e irregulares; na terceira aula, multiplicação de números naturais, multiplicação por 10, 100 ou 1000 e múltiplos; na quarta aula, multiplicação, propriedade comutativa e associativa da multiplicação em relação à adição. Além da observação das aulas, foram realizadas oito entrevistas semi-estruturadas (quatro das quais curtas). As entrevistas, excepto a última, que ocorreu após o estágio, foram realizadas na escola onde fazia o estágio. As entrevistas curtas foram realizadas após cada aula. Para complementar as observações e entrevistas, foi usada uma interpretação de situação de ensino e o registo de notas de campo.

A análise de dados é feita ao longo de todo o processo de investigação. Para isso, adoptamos o modelo de análise interactivo sugerido por Miles e Huberman (1994). Desse modo, a recolha e a análise de dados são feitas em sintonia, podendo inclusive, uma ser reformulada em função da outra. As categorias de análise utilizadas (Comunicação e regulação; Concepções e práticas de explicação; Concepções e práticas de negociação de significados;

A reflexão sobre a prática de comunicação) são ajustadas em função dos dados recolhidos.

Luzia

> Luzia tem 25 anos. Começou por frequentar a Licenciatura em Engenharia Electrotécnica. A certa altura, constatou que não sentia grande interesse pelo curso e apercebeu-se então que poderia gostar de ser professora de Matemática. Decidiu mudar e está satisfeita com a escolha. Dá ênfase a dois aspectos positivos da sua formação inicial – uma grande diversidade no modo como os professores de Matemática leccionam e o facto deles permitirem que os alunos experimentem novas ideias.
>
> Luzia afirma usar a comunicação para a organização dos alunos na sala de aula, ou seja, utiliza a comunicação na relação bipolar, professor-aluno. Agora no 4.º ano sente-se mais segura nesta relação, afirmando estar mais preocupada com aspectos directamente relacionados com a aprendizagem dos alunos, sublinhando agora a existência de uma relação ternária, professor-aluno-saber. Assim, nos primeiros três anos de estágio, tinha a preocupação de não perder a afeição do aluno, recorrendo à comunicação para regular o trabalho nas aulas. No entanto, neste momento da sua formação inicial, percebe que o uso da comunicação com este propósito não resulta necessariamente na perda de afeição. É importante notar esta mudança na sua concepção sobre o controlo do poder, uma vez que, de outro modo, a dinâmica duma aula voltada para a aquisição do significado matemático, tornar-se-ia comprometida.

Concepções sobre explicação e sobre negociação de significados

Luzia apresenta, a princípio, uma concepção de comunicação ideal para as aulas de Matemática: "Idealmente a comunicação devia-se fazer também muito, entre pares. (…) Acho que idealmente é isso, mas pronto, também depende do contexto, muitas vezes…" [E1L, 16/01/2009]. Para ela, a comunicação nas aulas de Matemática, de modo ideal, não teria o professor como protagonista. Os pares de alunos assumiriam um papel central nas interacções verbais e o professor assumiria o papel de mediador. Este professor apresentaria as ideias para os alunos chegarem aos resultados. No entanto, tal concepção pode ser limitada pelo contexto.

Para Luzia, na sala de aula, a explicação entre os alunos pode ser bem sucedida "porque às vezes o professor pode ter uma linguagem, hum, que não é adequada ao nível dele [do aluno] e se for um colega a dizer ah!" [E1L, 16/01/2009]. Apesar disso, afirma haver momentos nos quais o professor precisa explicar, uma vez que os alunos têm suas limitações, inerentes ao seu papel: "Há conceitos matemáticos que… Quer dizer, os miúdos também não são bruxos… Não adivinham, n'é? [Sorriso] … Não são bruxos e, claro, a professora tem que ter a sua intervenção" [E1L, 16/01/2009].

Luzia considera que no *problema da fuga das galinhas*, (que constituiu um exemplo de negociação de significados) se registou uma interacção bem conseguida:

Foi boa. Foi produtiva. (…) Acho que esta resultou. Tanto que eu depois, depois daquilo tudo, eu fiquei tão contente e fiquei admirada mesmo com a resolução deles que eu até quase disse "já tinha planeado mostrar a minha, mas será que vou mostrar? Já não faz sentido quase nenhum mostrar." [EAEL, 30/11/09]

As práticas de explicação e de negociação de significados

Luzia desenvolve explicações disciplinares e explicações instrucionais, como se depreende dos episódios A e B:

Episódio A

A segunda parte do Problema da *Pizaria* teve lugar na quarta aula, uma vez que na terceira aula não foi concluída a realização deste problema. Luzia retoma o problema, a partir da última resposta de um dos alunos, A19, que relaciona a posição das pizas à tabuada do dois, consoante ocorreu na aula anterior.
Luzia: (…) Então o 0 é múltiplo de 2, não é? Se temos um número [que aqui é o zero], multiplicado por 2, vai dar 0. Não é? Então o 0 é múltiplo de 2. Isso é para passar [Luzia determina que os alunos copiem o que está escrito no quadro nos seus cadernos]. Agora podem olhar para os múltiplos de 2, ali, que são as pizas de frango, e alguém consegue identificar que números são aqueles? Além de múltiplos de 2?
A19: São números pares.
Luzia: São números pares. Os múltiplos de 2, são todos números pares. Mais o zero. Por que? Por que não é ímpar?
A2: Porque o 2 é par.
Luzia: Porque o 2 é par?
A2: [palavras imperceptíveis] [os alunos estão fazendo barulho].
Luzia: Já passaram?
Als: Já.
Luzia: Norma, já passaste?
A13: Já.
Luzia: Então, o número 14 é múltiplo de 3?
Als: Não.
Luzia: Por que?
A1: Sim.
Luzia: Ou é porque não há nenhum número multiplicado por 3, que dê 14?
Als: Sim.
A2: Porque na tabuada do 3 só há números ímpares?
Als: [palavras imperceptíveis]
Luzia: Os múltiplos de 3 não são todos ímpares. [palavras imperceptíveis]
[Aula 4, 20/03/2009]

Depois de os alunos relacionarem a sequência de números das pizas com a tabuada do dois, Luzia passa agora a questioná-los para apontarem outra relação existente entre este número e os números da sequência de piza.

Quando o aluno A19 relaciona a sequência de números das pizas com os múltiplos, ela desenvolve uma *explicação disciplinar* incompleta sobre a definição de múltiplos, complementada pelo aluno A2. A explicação de uma aluna relaciona-se com a explicação disciplinar incompleta que Luzia desenvolveu alguns momentos antes, na qual os múltiplos de dois são obtidos através da multiplicação do número dois pela sequência de números inteiros. Após confirmar ser o zero um múltiplo de dois, uma vez que a explicação da aluna se coaduna com a sua, começa a questionar os alunos sobre outras relações que eles vêem na sequência de números das pizas. Diante da resposta de um aluno que identifica estes números com os pares, Luzia questiona sobre o porquê de não serem ímpares.

Episódio B

No decorrer da correcção da *tarefa de investigação*, que também teve lugar na quarta aula, Luzia desenvolve mais explicações instrucionais.

> **Luzia:** [os alunos fazem barulho] Então esperem, esperem. Agora eu quero fazer aquilo com atenção. Ó meninos! Prestem atenção! Quando eu faço daqui pra aqui, quando eu passo desta expressão pra essa expressão, o que estou a fazer é pegar nestes dois factores [Luzia aponta para o quadro] e colocá-los primeiro, não é? Então a multiplicação permite-me fazer isto. Eduardo, a multiplicação permite fazer isto, sem que eu tenha que trocar os factores. O que eu posso fazer é 6 vezes 5 vezes 4 [6x5x4], isto já é outra coisa, é igual a 6 vezes 5 vezes 4, entre parênteses [6x(5x4)]. O entre parênteses quer dizer o quê? Sónia, o entre parênteses serve pra quê?
> **A11:** [Palavras imperceptíveis]
> **Luzia:** O entre parênteses significa que a operação que lá estiver dentro, tem que ser resolvida primeiro. Camila, Camila, repete aquilo que eu disse. Mas não é pra passar primeiro, primeiro é pra perceber, depois passas. Pra que serve o parêntesis? Serve pra quê? Quando tiveres uma expressão entre parêntesis, o que é que tu fazes? Como é que fazes a conta? Fazes 4 vezes 5 vezes 4. Fazes 6 vezes 5 vezes 4.
> **A3:** Não.
> **Luzia:** Então fazes o quê?
> **A3:** [Palavras imperceptíveis]
> **Luzia:** 6 vezes 4? Norma. Ouviste Camila? Primeiro temos que fazer 5 vezes 4, o parênteses quer dizer, que quando aparece uma expressão, significa que temos que fazer esta operação primeiro. Camila, tens um parêntesis, fazes primeiro o que tá lá dentro. Esta propriedade de fazer primeiro a operação do fim e depois voltar a multiplicar pro primeiro operador, chama-se a propriedade associativa.
> **A9:** Associativa, né?
> **Luzia:** Eu posso associar os factores que eu quiser, como eu quiser. Por exemplo, eu tenho, 3 vezes 2 vezes 3 vezes 2. Eu posso fazer primeiro, vamos fazer assim, vamos ver quanto é que dá.
> **A3:** Isto é pra passar?
> **Luzia:** Diz.
> **A3:** Isto é pra passar?
> **Luzia:** É. Tomé faz lá a operação.
> **A3:** 6 vezes 3, 18, vezes 2 …

Luzia: 6 vezes 3? 18. Vezes 2?
A3: 36.
[Aula 4, 20/03/2009]

A explicação final da candidata a professora, nesta parte do episódio, é *instrucional.* No desenvolvimento desta explicação mostra a possibilidade de uso da propriedade associativa na multiplicação. Tal explicação pode ser assim considerada com mais ênfase quando passa a explicar sobre o significado do parêntesis. A esta explicação, seguem-se questões de Luzia que focam sobre o significado do parêntesis. No entanto, os alunos não conseguem explicar. A sua actuação aqui é similar ao que ocorreu em outros momentos de sua aula, nos quais ela mesma explica questões relevantes. Nesta explicação instrucional, apresenta um exemplo para esclarecer a propriedade associativa da multiplicação.

Episódio C

Nesta explicação do valor posicional, no sistema de numeração decimal, o uso do quadro das ordens numéricas (Figura 3), (este quadro encontra-se na Reflexão Escrita de Luzia sobre a Aula 3) constituiu-se numa importante representação de Luzia.

Figura 3: Quadro das Ordens Numéricas-RELA3, 16/03/2009-p. 3.

Centenas	Dezenas	Unidades	,	Décimas	Centésimas	Milésimas

Luzia: Se multiplicarmos uma unidade por 10, essa unidade vai ficar quantas vezes maior?
Als: Dez vezes.
Luzia: Dez vezes maior. E como é que se escreve? A unidade deixa de estar na ordem das unidades e passa a estar na ordem das dezenas. E aqui temos que colocar o zero, não é? Então um vezes 10 é 10. Multiplica-se, não é? Então, não acrescentamos só o zero, a unidade, o número que estava na unidade é que se deslocou pra ordem das dezenas, porque multiplicamos por 10. E se eu multiplicar uma unidade por 100? Tenho uma unidade e agora vou multiplicar por 100. O que é que que vai acontecer, ao número que está aqui?
Als: Vai pras centenas.
Luzia: Vai pras centenas, porque multiplicamos por 100. Claro que aqui temos que por um zero e aqui também, né? Então, não é só acrescentar um zero. É o número que nós temos é que se desloca na ordem. Se nós temos uma unidade e multiplicamos por 10 ela fica dez vezes maior. Então temos uma dezena, não temos uma unidade e temos uma dezena. Se tivermos uma unidade e multiplicarmos por 100, ela vai ficar 100 vezes maior. Então ele vai deslocar-se pra ordem das centenas. Muito bem. Então e se eu tiver uma unidade e eu multiplicar por uma décima? Se nós temos uma unidade e nós vamos multiplicar

por uma décima, nós sempre quando multiplicamos por uma décima, o número vai ficar quantas vezes menor?
Als: Dez vezes.
Luzia: Dez vezes menor. Então, se temos uma unidade, se temos aqui uma unidade e ele vai ficar dez vezes menor, então o 1 vai deslocar-se pra onde?
A12: Pra casa das décimas.
[Aula 3, 16/03/2009]

Trata-se de *explicações instrucionais*, uma vez que Luzia procura fazer estas explicações a fim de explicitar o significado da mudança de ordem no sistema de numeração decimal e o faz a partir da resposta colocada por uma das alunas. Esta resposta da aluna não explicitava este significado. A questão para esta explicação desenvolvida pela candidata a professora é implícita (o que acontece quando um número_muda de ordem no sistema de numeração decimal?). Além disso, tal explicação é desenvolvida durante uma tarefa, inserida no contexto de uma actividade, que envolve a candidata a professora e a classe-inteira em um discurso coerente.

As explicações de Luzia justificam as acções realizadas na mudança de ordem de um algarismo no sistema de numeração decimal. Tais explicações, em suas conexões, mostram como um número muda de ordem neste sistema de numeração. Tendo em conta o modelo de explicações instrucionais (Figura 1), as explicações efectuadas pela candidata a professora, neste momento da aula, envolvem o objectivo, sendo este a representação dos números utilizando o quadro das ordens numéricas (Figura 3). Durante o uso desta representação em sua explicação, realiza três acções: Selecciona cada número a ser representado, constrói sua representação do número no referido quadro e refina ao explicar o significado desta representação do número no quadro. Para encontrar de modo bem sucedido o objectivo mencionado acima, precisou demonstrar um conhecimento do conteúdo bem articulado e um conhecimento dos alunos que aqui pode ser identificado quando ela aproveita a resposta da aluna que não explicitava o significado da mudança de ordem no sistema de numeração decimal para desenvolver sua explicação. Da parte dos alunos, estas explicações constituem uma das regras de contrato didáctico das aulas de Luzia.

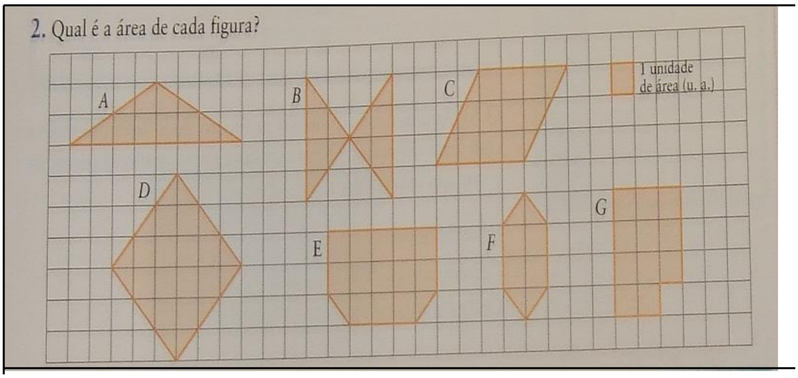
Episódio D

No decorrer da correcção da tarefa seguinte, um exercício do manual, que teve lugar na primeira aula, emergem mais explicações dos alunos que não se restringem apenas às de natureza procedimental.

Luzia: Mas como é que tu tens certeza que este, que essa adição dessa, dessas áreas pintadas, que esse bocadinho faz um com aquele lá de cima? Como é que faz?
A17: Este tem o espaço mesmo que somo com a régua.
Luzia: Como é que mediste com a régua? Mediste a distância daqui aqui e daqui aqui? [os alunos fazem barulho] Ó meninos parem lá, parem lá. Aquilo que a

Joana disse é verdade. Se vocês tivessem feito com papel, vocês verificavam que este bocadinho aqui …
A17: [palavras imperceptíveis]
Luzia: Qual? Este? Este? Este mais este, mais este, faz um? Então? [os alunos arrastam carteiras]
A17: Este com este faz uma unidade.
Luzia: Hum.
A16: Este com este faz uma unidade. Este com este faz uma unidade. Depois é este com este que faz uma unidade. Este com este faz uma unidade e depois chamo este quatro.
[Aula 1, 06/02/2009]

Figura 4: Exercício 2 da página 15 do manual adoptado.



Na parte inicial deste episódio, os alunos A11 e A16 desenvolvem uma explicação de natureza procedimental, uma vez que não clarificam como os resultados devem ser interpretados. Por outro lado, na parte final do episódio, onde a candidata a professora pergunta "Como é que faz?", as explicações dos alunos passam a descrever uma acção sobre um objecto matemático, uma vez que fazem referência explícita ao valor das quantidades que os números significam e clarificam como os resultados devem ser interpretados.

Um exemplo de negociação de significados, referente ao conceito de solução de um sistema de equações do 1.º grau, surge numa das aulas de Luzia, no episódio **E**:

Episódio E-Parte 1

Luzia coloca o acetato com o enunciado do problema no retroprojector e pede para um dos alunos ler em voz alta.

A3: A Fuga das Galinhas.
Luzia: Tomé tem que ser mais alto. Eduardo.
A3: Um dia antes de fugirem da quinta, as galinhas resolveram tirar uma fotografia juntamente com as vacas. Na foto tirada por uma das vacas podiam contar-se 34 patas. Na foto tirada por uma das galinhas viam-se 13 cabeças. Quantas galinhas e quantas vacas haviam na quinta?

Luzia: Se uma galinha foi tirar fotografia e contou 13 cabeças, quantos animais é que haviam? [a professora Simone chama a atenção para o barulho que os alunos estão fazendo] Bernadete.
A9: 14.
Luzia: 14, por que?
A9: Temos que contar.
Luzia: Temos que contar os 13 animais que apareceram na fotografia, mais a cabeça da pessoa que tirava a fotografia. Então assim, quantas patas é que haviam? Quem põe o dedo no ar? Alexandre.
A14: 38.
Luzia: 38. Por que?
A14: Se for a galinha a tirar tem 38 patas …
Luzia: É que a galinha tem quatro patas, é isso?
A14: Nãaao!
Luzia: Então. Por que tiraram fotografia quando contaram 34 patas?
A14: Da vaca.
Luzia: Então, 4 patas da vaca mais 34 da fotografia…
A15: Dá 38.

Após a leitura do enunciado do problema feita por um dos alunos, Luzia procura contribuir para a interpretação do problema. O aluno A14 responde à questão de Luzia, mas sua resposta é errada. A candidata a professora procura, através de outra questão, fazê-lo reflectir sobre o erro. Ele responde de modo incompleto "da vaca" e a candidata a professora explicita os detalhes.

Episódio E-Parte 2

A seguir à colocação de uma questão a um aluno, que foi ao quadro, para saber como ele resolveu o problema, o episódio passa a ter outra característica.

Luzia: Então temos aqui 14 cabeças, meninos! [os alunos estão fazendo barulho] Temos aqui 14 animais. E o Tomé, e o Tomé fez duas patas pra cada um. Quantas são? Quantas são? As patas estão aqui.
A3: 29, 28.
Luzia: 28. 28, 29, 30. 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38. Então essas são as vacas, e as outras?
A18: São galinhas.
Luzia: São galinhas. Quem é que fez de outra maneira? Joana. Como é que tu fizeste?
A4: [palavras imperceptíveis]
Luzia: Foi assim também? Bom, tá bem. Eu ia pedir ao Tomé que fizesse de uma maneira diferente.
[Aula 4, 20/03/2009]

A segunda parte do episódio caracteriza-se pela procura de Luzia, em suas questões aos alunos, por soluções diferentes para o problema. Ao actuar deste modo, nas interacções verbais com os alunos, contribui para o estabelecimento de uma norma sociomatemática, o matematicamente diferente.

CONCLUSÃO

A candidata a professora do estudo de caso aqui relatado, Luzia, concebe a explicação dos alunos como forma ideal de comunicação nas aulas de Matemática, nomeadamente entre pares. Na sua concepção, o professor não deve ser o protagonista da comunicação oral. No momento do estágio, procura pôr em prática essas ideias, embora se sinta limitada pelo contexto.

Na sua prática lectiva podemos perceber a utilização da comunicação como meio de regulação e como suporte para a aprendizagem matemática (tal como indicam Ponte et al., 2007). Desta prática também percebemos a relevância da sua explicação, que pode ser disciplinar ou instrucional. As explicações dos alunos podem ser procedimentais ou descrever acções sobre objectos matemáticos. Estas explicações são reguladas pelas regras de contrato didáctico que informam as aulas. A negociação de significados também está presente nas interacções verbais das suas aulas. Na negociação podemos identificar o modo como aproveita o erro do aluno para fomentar a sua aprendizagem e a importância que dá à apresentação de diferentes soluções para um problema.

Este estudo sugere a relevância da explicação do professor e do aluno e da negociação de significados nas concepções e nas práticas da candidata a professora. Por se considerar à vontade com o uso da comunicação para regular o trabalho nas aulas, Luzia pode contribuir para que a negociação de significados emerja nas suas aulas com assinalável frequência.

REFERÊNCIAS

Bishop, A., e Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Brousseau, G. (1996). Os diferentes papéis do professor. In C. Parra e I. Sayz (Eds.), *Didática da Matemática: Reflexões psicopedagógicas* (pp. 48-72). Porto Alegre: Artes Médicas.

Charalambous, C. Y. (2009). *Mathematical knowledge for teaching and providing explanations: an explanatory study.* In Tzekaki, M. Kaldrimidou, M e Sakonids, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 305-312). Thessaloniki, Greece.

Cobb, P. e Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Frid, S., e Malone, J.A. (1994). *Negotiation of meaning in mathematics classrooms: A study of two year 5 classes.* Paper presented at the Annual Meeting of the AERA (New Orleans, April, 4-8, 1994).

Lampert, M., e Cobb, P. (2003). Communication and language. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, e D. Shifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 237-249). Reston, VA: NCTM.

Leinhardt, G. (1993). Instructional explanations in history and mathematics. In W. Kintsch (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 5-16). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Leinhardt, G. (2001). Instrucional explanations: a commonplace for teaching and location for contrast. In V. Richardson (Ed.), *Handbook for research on teaching* (4th ed., pp. 333-357). Washington, DC: AERA.

Levenson, E., Tirosh, D., Tsamir, P. (2009). *Mathematically-based and practically-based explanation: which do students preffer?* In Tzekaki, M. Kaldrimidou, M. e Sakonids, H. (Eds.), *PME* (Vol. 2, pp. 305-312). Thessaloniki, Greece.

Martinho, M. H. (2004). *A comunicação na sala de aula de Matemática: Contributos para o desenvolvimento profissional do professor*. Retirado de http://www.cie.fc.ul.pt/teses/temporario/MHM-Seminario.doc em 22 de Março de 2007.

Medeiros, K. M. (2001) O contrato didáctico e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula. *Educação Matemática em Revista*, *8*(10), 32-39.

Miles, M., e Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. London: Sage.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM (2007). *Standards for school mathematics: Communication*. Retirado de http://my.nctm.org/ebusiness/mlogin.aspx?return=/standards/document/chapter3/comm.htm. em 27 de Agosto de 2007.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., e Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 20*(2), 39-74.

Sfard, A. (2002). Mathematics as form of communication. *Proceedings of the 26th PME Internacional Conference*, Vol 1, 145-149.

Yackel, E., e Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

O papel do outro (aluno) na comunicação matemática – práticas de uma professora do 1.º ciclo

António Guerreiro
Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve

RESUMO:

Nesta comunicação apresento práticas de uma professora do 1.º ciclo do ensino básico a propósito da comunicação matemática na sala de aula, enquadrando-as nas teorias da comunicação e na comunicação matemática. Tentarei discutir a acção da professora na valorização das práticas de interacção entre os alunos, visando o contraponto entre as suas práticas iniciais e durante o desenvolvimento de uma investigação sustentada num trabalho de natureza colaborativa, entre mim e três professores deste nível de ensino. O trabalho de campo desta investigação decorreu ao longo de dois anos e consistiu na análise das práticas de comunicação matemática em sala de aula e na sua reformulação com vista à promoção da comunicação matemática como interacção social.

As orientações curriculares sobre a comunicação matemática põem a ênfase na representação de ideias matemáticas, na oralidade, na escrita e na leitura de e sobre matemática e salientam o papel da linguagem abstracta e simbólica da Matemática, a par da valorização das interacções entre os alunos e entre estes e o professor, realçando a sua relevância na construção de uma aprendizagem significativa (DEB, 2001; DGIDC, 2007; NCTM, 1991, 2007).

As orientações curriculares nacionais sobre a comunicação matemática foram clarificadas e reforçadas com a publicação, em 2007, do Programa de Matemática do Ensino Básico, ao valorizarem a capacidade dos alunos comunicarem as suas ideias matemáticas e de interpretarem e compreenderem as ideias dos outros, participando em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos. A comunicação matemática surge no referido programa associada às dimensões mais usuais do discurso e da linguagem, mas também à interacção entre os alunos e entre estes e o professor.

As concepções sobre o entendimento do papel da comunicação são *moldadas* pelo significado do papel do *outro*: ouvinte atento ou parceiro comunicativo. Estas visões *divergentes* resultam da percepção da comunicação como auxiliar na transmissão de informação ou como alicerce na construção do conhecimento, pressupondo perspectivas significativamente diferentes sobre a construção do conhecimento matemático.

Neste artigo, apresento uma síntese das características centrais do papel do *outro* em teorias da comunicação, com referências à comunicação matemática e ao papel do professor e dos alunos, uma resenha da metodologia adoptada numa investigação em curso sobre comunicação matemática no 1.º ciclo do ensino básico e episódios de sala de aula em que o papel dos alunos no desenvolvimento da comunicação como interacção social é valorizado pela professora Laura (nome fictício).

O PAPEL DO OUTRO NAS TEORIAS DA COMUNICAÇÃO

As perspectivas defendidas nas orientações curriculares para o ensino da Matemática enquadram-se na comunicação enquanto processo de interacção social, que difere de outras visões de comunicação enquanto transmissão de informação. Nestas ópticas sobre a comunicação, o papel do *outro* toma significados substancialmente distintos, em consonância com o papel do *eu*. Estas concepções influem no processo de ensino-aprendizagem e no papel do professor e do aluno em contexto educativo.

Comunicação como transmissão

A comunicação enquanto transmissão de informações assenta num processo *linear* e *unidireccional*, entre um comunicador e um destinatário, aferido pelo *feedback* que permite ao comunicador controlar o modo como o destinatário está a receber as informações (Sfez, 1991). A existência de *feedback* origina uma circularidade na comunicação, fazendo com que o discurso do emissor seja *orientado-para-o-ouvinte* (Bitti e Zani, 1997), mas não valoriza o papel do destinatário (do *outro*). Pelo contrário, tenta assegurar uma maior fidelidade dos receptores (dos *outros*) aos desejos do emissor (do *eu*), garantindo uma maior eficácia da mensagem (Bordenave, 1995).

A existência de códigos de emissão e recepção de mensagens, entendidos como um sistema de significados comuns aos membros de uma cultura, e a codificação e a descodificação constituem os procedimentos que permitem a transmissão de informações entre os intervenientes do processo de comunicação (Fiske, 2005; Rüdiger, 2004). No entanto, este processo confere um poder de transformação do objecto inicial ao emissor, através da codificação, sem reconhecer o mesmo poder ao destinatário, limitando-o ao papel de descodificador na interpretação da mensagem (Sfez, 1991).

Neste mesmo sentido de centralidade do papel do emissor (do *eu*), a qualidade da aprendizagem da Matemática depende da capacidade do professor se fazer entender e transmitir os seus conhecimentos matemáticos (codificação da mensagem) e da capacidade do aluno em entender o professor e compreender os seus ensinamentos (descodificação da mensagem).

A comunicação matemática depende assim da competência do professor na utilização de um código, adaptado ao nível etário e intelectual dos alunos, e na regulação da aprendizagem dos alunos. Deste modo, tenta garantir uma correspondência perfeita entre os significados da mensagem que emite (ensino do docente) e os significados do aluno no seu próprio processo de descodificação (aprendizagem do educando).

As práticas de comunicação, entendida como transmissão de informação, ajustam-se às concepções tradicionais sobre a natureza da Matemática e do seu ensino, nomeadamente na relação entre uma prática de comunicação centrada no professor e o ensino da matemática baseado em regras e procedimentos (Thompson, 1984, 1992). A centralidade do papel do professor no processo de ensino-aprendizagem, detentor do conhecimento matemático, mesmo que baseado em regras e procedimentos, é sinónimo da existência do *eu conhecedor* e do *outro não conhecedor*. Esta dualidade reforça a perspectiva do ensino como transmissão de informações e conhecimentos e condiciona o papel do aluno ao de receptor do conhecimento. O sucesso do ensino-aprendizagem depende da capacidade do aluno descodificar o conhecimento codificado pelo professor.

Comunicação como interacção

A comunicação enquanto interacção social é um processo que resulta da partilha de significados construídos e reconstruídos pelos indivíduos, em que o sujeito (o *eu*) se identifica com o *outro* e, ao mesmo tempo, exprime e afirma a sua singularidade (Belchior, 2003). A comunicação tem a função de gerar o entendimento entre os indivíduos através de um processo de partilha e reconstrução de significados (Godino e Llinares, 2000).

Nesta perspectiva, é a interacção com os outros que permite ao sujeito construir a sua identidade como pessoa, a partir de uma participação na acção do *outro* com o qual nos encontramos em perfeita permuta de papéis (Beaudichon, 2001). É em interacção que o sujeito aprende a ver-se com os olhos do *outro* numa acção de complementaridade e de reconhecimento mútuo. Esta acção comunicativa caracteriza-se como um processo em que o sujeito (o *eu*) age para partilhar com o *outro* o seu mundo de vida e se compreenderem mutuamente. A compreensão mútua não se reduz à compreensão das mensagens em si, mas resulta do processo de interacção entre sujeitos com capacidade de reflexão e compreensão do outro (Habermas, 2004, 2006).

Tendo por base a comunicação como interacção social, nomeadamente adoptando o interaccionismo simbólico, o conhecimento não existe na cabeça do professor pronto a ser transmitido, mas emerge de uma prática discursiva que se desenvolve na sala de aula, decorrente de processos colectivos de comunicação e interacção. A aprendizagem matemática decorre das interacções do professor com os alunos *na* e *acerca da* matemática. Neste sentido, podemos dizer que o significado matemático não está no sentido dos signos ou representações, mas está no *uso* das palavras, frases, ou signos e símbolos. O discurso na sala de aula é entendido como uma *linguagem em acção*, é um *pensar com palavras* com os outros e para os outros, como meio de atingir fins cognitivos, sociais e outros (Godino e Llinares, 2000; Sierpinska, 1998).

Assim, a valorização do diálogo torna-se um aspecto central da comunicação na sala de aula de Matemática, quando entendido como *uma conversação que visa a aprendizagem* (Alro e Skovsmose, 2006), caracterizado como um processo de colaboração, onde cada um dos sujeitos tem de explicitar as suas perspectivas ao mesmo tempo que *abre mão* delas, num clima de confiança mútua, tendo por base o princípio da igualdade.

As práticas de comunicação, baseadas na interacção e no diálogo entre os alunos e entre estes e o professor, parecem estar associadas a um ensino baseado na construção de significados matemáticos e na valorização da expressão e das ideias dos alunos (Thompson, 1984, 1992). Esta relação sugere que o discurso matemático em sala de aula, normalmente caracterizador de uma prática matemática, parece decorrer mais das concepções sobre a natureza da disciplina e do seu ensino do que das concepções sobre a natureza das práticas de comunicação em sala de aula (Brendefur e Frykholm, 2000).

Na comunicação parecem existir duas dimensões: a persuasão e o entendimento. A dimensão de persuasão decorre da transmissão de informações, culturalmente reconhecidas, que condicionam o comportamento dos indivíduos. A dimensão do entendimento resulta de um processo de interacção, mediado simbolicamente, em que os indivíduos buscam uma compreensão mútua. Esta última dimensão, pressupõe a existência do novo e reconhece o papel activo do receptor (do aluno) na produção de um entendimento mútuo entre os intervenientes. Deste modo, cabe ao professor partilhar com o aluno o papel de actor activo no processo de ensino-aprendizagem, assumir a autonomia de conhecimento dos alunos e a sua capacidade de entender e reflectir sobre o conhecimento construído, e valorizar as intervenções e opiniões dos outros (dos alunos).

OPÇÕES METODOLÓGICAS

A investigação suporte desta comunicação enquadra-se numa metodologia qualitativa adoptando o paradigma interpretativo e tomando por *design* o estudo de caso (Stake, 1994). Participam neste estudo três professoras do 1.º ciclo do ensino básico, num contexto de trabalho de natureza colaborativa comigo, consubstanciado na análise reflexiva das práticas de comunicação matemática em sala de aula.

O estudo foi concebido com duas fases, com um crescente envolvimento do investigador: a *fase da caracterização*, para caracterizar os intervenientes e interpretar o *estado da arte* (Dezembro 2006 a Outubro 2007), e a *fase de colaboração*, para trabalhar colaborativamente a comunicação matemática no processo de ensino-aprendizagem (Outubro 2007 a Fevereiro 2009). O trabalho de natureza colaborativa implicou a discussão de textos sobre comunicação, a planificação global de algumas tarefas matemáticas e, fundamentalmente, a análise das práticas de comunicação matemática em sala de aula.

Na recolha de dados, utilizei essencialmente a técnica de *observação e participação* na sala de aula, complementada com a realização de entrevistas e encontros de trabalho, em ambiente colaborativo, com as professoras participantes no estudo. As aulas *observadas* foram registadas em áudio e vídeo, complementadas por algumas notas de campo e escritos dos alunos, e as entrevistas e encontros de natureza colaborativa (individuais e colectivas) foram registados em áudio. A multiplicidade de instrumentos de recolha de dados não decorreu da utilização da triangulação dos dados, mas da necessidade de clarificar sentidos, complementar o significado da informação recolhida e identificar diferentes modos de ver os acontecimentos (Stake, 2000).

A análise de dados será organizada em estudos de caso, os quais tentarão interpretar as concepções e práticas das professoras sobre a comunicação matemática em sala de aula. Os procedimentos de análise dos dados envolvem diferentes fases até à construção do texto interpretativo que corporiza *o caso*. O principal objectivo deste processo é reduzir a *montanha* de dados, provenientes do trabalho de campo, num conjunto de dados substancialmente menor, referenciáveis na escrita do *caso*. Esta selecção de dados deve atender à complexidade dos fenómenos e dos contextos, incorporando o sentido da plenitude da informação recolhida, através das referências significativas dos dados, sem falhas nem sobreposições, que possam reconstruir as vivências, relativas ao fenómeno estudado, dos participantes na investigação (Goetz e LeCompte, 1984).

Neste artigo, optei por seleccionar três episódios de sala de aula, situados cronologicamente nas duas fases do processo de investigação, que ilustram dois momentos temporais das práticas lectivas da Laura. Com estes episódios pretendo ilustrar a intenção comunicativa da professora na valorização do conhecimento do aluno, confrontando a existência de perspectivas distintas sobre o papel do aluno: ouvinte atento ou parceiro comunicativo.

Os episódios, isolados do encadeamento do processo de investigação e dos avanços e recuos da professora (e dos alunos) na comunicação matemática em sala de aula, podem não transmitir uma evolução das práticas lectivas da professora, mas ilustram aspectos que se manifestaram relevantes no desenvolvimento da comunicação da matemática enquanto interacção social. A exploração do erro e das concepções erradas dos alunos surgiu como um dos eixos centrais na compreensão dos alunos e na valorização do seu conhecimento, a par da promoção da comunicação matemática em sala de aula.

PRÁTICAS COMUNICATIVAS NA AQUISIÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Ponto de partida

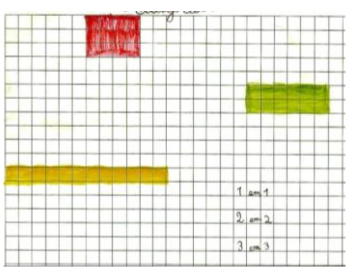
O episódio de sala de aula que se segue decorreu na segunda aula observada, na turma do 1.º ano de escolaridade da professora Laura. Nessa aula, a comunicação matemática existente centrou-se, basicamente, na exposição dos procedimentos efectuados pelos alunos durante a resolução da tarefa matemática.

A professora propôs aos alunos, organizados em grupos, a construção de painéis rectangulares com doze quadrados. Os alunos construíram, sucessivamente, os diferentes painéis, colando os doze quadrados numa folha de papel A3.

Após a fase de trabalho autónomo, com a regular supervisão e validação dos resultados pela professora, os alunos foram sucessivamente ao quadro apresentar as actividades desenvolvidas em grupo. A professora geriu esses momentos de comunicação solicitando a cada um dos grupos que apresentasse o seu trabalho aos colegas, sem abrir espaço para a discussão das apresentações:

> Professora: Este grupo aqui da frente, que são tão animados, levantem-se lá. Venham lá aqui mostrar aos colegas o que fizeram. Vão dizer como é que fizeram.

A intervenção inicial da professora remete os alunos para a apresentação aos colegas do modo como realizaram a tarefa matemática. Após a afixação no quadro do trabalho realizado pelo grupo de alunos, a professora inicia e dirige toda a apresentação dos alunos, acentuando a óptica de explicação do procedimento.



> Professora: Qual foi o primeiro que vocês fizeram?

Os alunos, junto ao quadro, apontam para o primeiro rectângulo da colagem realizada.

> Professora: Esse. Como é que fizeram este aqui?

> Aluna: Quatro …
> Professora: Quatro.
> Aluna: Quatro, quatro e quatro …
> Professora: Foi assim?
> Outra aluna: Quatro, três e três …
> Professora: E o segundo?
> Aluna: Fizemos de dois, dois…
> Outra Aluna: Dois em dois e quatro em quatro.
> Professora: Quatro, não.
> Aluna: Um, dois, três, quatro …
> Aluno: cinco, seis.
> Professora: Ah, e o último, como é que foi? Tu há bocado disseste-me assim: «Temos que fazer três, três, três…», eu disse: «não, já tens aqui três, três, três …», «ah, pois há. Então temos de fazer quatro, quatro, quatro …», mas vocês já têm aqui, ah pois há, «então temos de fazer dois», mas vocês já têm aqui. O que é que me disseste depois?
> Aluna: Podemos fazer de um em um.
> Professora: Já só faltava um, um, um …Estão a ver como é que eles fizeram. Aquele grupo! (iniciando a apresentação de um novo grupo) Deu para fazer quantos rectângulos, a toda a gente, diferentes?
> Aluno: Três.
> Professora: Três. Podem sentar-se. [Aula, Junho 2007]

A Laura valoriza a comunicação oral – "*Gosto mais da comunicação oral, porque é ali para todos*" [Entrevista, Dezembro 2006] –, especialmente com os alunos dos primeiros anos. Contudo, as intervenções dos discentes, nesta fase inicial, são muito reguladas pela professora, segundo o modelo de *emissor activo* e *receptor passivo,* sem debate nem diálogo entre estes. Estas práticas firmadas na perspectiva da comunicação enquanto transmissão de informação parecem ajustar-se às concepções manifestadas pela professora no início da investigação:

> Eles são pequenos e nós estamos a transmitir muitas coisas, e é importante também sabermos comunicar e saber o que estamos a dizer. (…) Senão for bem exposto, se eles não entenderem bem, se não esclarecermos como deve ser, eles nunca vão conseguir fazer bem e a matemática então tem esse problema, se a coisa não for bem, bem … ali explicada [Entrevista, Dezembro 2006]

As restantes apresentações das actividades dos alunos decorreram de modo similar, como consequência da validação prévia dos resultados e da orientação discursiva da professora, revelando um assumir da participação dos alunos, apesar da repetição constante das mesmas estratégias e resultados, e a valorização da oralidade.

Novas práticas

Ao longo do trabalho de natureza colaborativa de análise das práticas de comunicação matemática na sala de aula, surgiu um conjunto de propostas de alteração destas, com vista à promoção de uma maior interacção entre os alunos como forma de construção colectiva do conhecimento matemático. De entre essas propostas, saliento a não validação prévia dos resultados e um maior enfoque na comunicação, nomeadamente nas explicitações dos alunos sobre os seus processos de resolução das tarefas e no confronto de opiniões entre os alunos. Estas estratégias de actuação resultaram numa maior valorização dos conhecimentos prévios e na desconstrução das concepções e dos conhecimentos errados ou parcialmente incorrectos dos alunos.

O segundo episódio apresentado decorreu na mesma turma, agora no 2.º ano de escolaridade. Neste extracto, os alunos argumentam entre eles, por vezes com o apoio da professora, e exploram as incongruências lógicas das resoluções apresentadas em relação às condições iniciais do problema da travessia de um rio. Este episódio testemunha um maior debate das ideias matemáticas, entre os alunos, como resultado da exploração do erro como estratégia de aprendizagem.

Na sala de aula da turma da Laura, os alunos, por indicação da professora, começaram por apresentar as soluções erradas ou incompletas – ainda não tinha sido validada ou invalidada nenhuma das estratégias de resolução dos alunos – do problema da travessia do rio, num bote com um cão de caça, um coelho e uma couve – cada um destes elementos é levado isoladamente pelo *Joãozinho* e não pode permanecer na mesma margem, sem vigilância humana, o cão e o coelho ou o coelho e a couve. A aluna Mónica apresenta a resolução do seu grupo escrevendo:

> «O Joãozinho leva o coelho no bote. O Joãozinho leva a couve ao colo e o cão ao lado, e seguiram caminho».
>
> Enquanto a aluna escreve no quadro, alguns alunos de outros grupos esperam de dedo no ar, como sinal de que querem questionar a colega, o que leva a professora a dizer, quando a aluna termina a sua apresentação:
>
> Professora: – Há braços no ar.
>
> A aluna escolhe um dos colegas para a questionar. Este comportamento dos alunos revela uma atitude de reconhecimento em relação ao trabalho do outro, uma participação activa dos receptores da comunicação e uma predisposição para dialogar.
>
> Após uma intervenção direccionada para a confrontação da solução correcta com a estratégia apresentada, os alunos não se limitaram a considerar a resolução apresentada como errada, mas preocuparam-se com a identificação da incongruência da resolução com o enunciado. Um dos alunos explica:
>
> Gonçalo: – O grupo pôs assim «a couve ao colo e o cão ao lado», mas só podia ir um animal.
>
> Professora: – Onde?
>
> Gonçalo: – No barco.
>
> Professora: – Uma coisa. Mas assim iam três coisas.
>
> Gonçalo: – Pois, mas a couve não podia ir no colo do Joãozinho. Só podia ir o cão ou a couve, uma coisa só.
>
> Aluna: – Só podiam ir dois passageiros.
>
> Professora: – Só podiam ir dois passageiros.
>
> A professora sintetiza as observações dos alunos sem, contudo, acrescentar ou direccioná-los para a solução do problema. De seguida, Laura remeteu a conclusão da aluna para o grupo que estava no quadro, salientando a

impossibilidade de mais de dois *passageiros* no bote. Perante esta *recusa*, um dos elementos do mesmo grupo – o Tiago – apresentou uma nova proposta de solução, escrevendo:
«*Primeiro vai o cão.* [Os alunos agitam-se porque consideram errado o que o colega escreveu] *Segundo vai a couve. Em último vai o coelho*».
O Gonçalo, observando a explicação escrita do Tiago, refere:
Gonçalo: – Eu já sei o que está mal.
Professora: – Então vai lá, Gonçalo. Vai para o quadro dizer o que está mal. Vai o Gonçalo. Tiago ficas aí, para te defenderes.
Esta atitude da professora de incentivar o diálogo entre os alunos, a argumentação e a contra-argumentação, revela uma crescente consciência da importância da comunicação, enquanto interacção, como forma de construção do conhecimento.
O Gonçalo dirige-se ao quadro e argumenta com o Tiago:
Gonçalo: – O cão não podia ir primeiro, porque se o Joãozinho levasse o cão… Se o Joãozinho atravessasse o rio com o cão, depois o coelho comia a couve.
Tiago: – Mas eu ainda não pus a couve.
Surgem opiniões cruzadas provenientes de diversas vontades de explicar o erro cometido, o Gonçalo volta a argumentar:
Gonçalo: – O coelho está lá em cima com a couve e o Joãozinho traz o cão cá para baixo, não é?
Outro aluno [para o Tiago]: – Quando te virasses para trás, já não tinhas couve.
Gonçalo: – Quando o Joãozinho traz o cão para baixo, o coelho pode comer a couve.
Outro aluno: – Pois é.
A professora regressa ao Tiago, perguntando-lhe se está a compreender as explicações dos colegas. O aluno diz que sim e explica que errou na primeira:
Tiago: – Na primeira.
Professora: – Porquê?
Tiago: – Porque se fosse o cão na primeira, o coelho já tinha comido a couve.
[Aula, Março 2008]

Neste episódio saliento o desenvolvimento do diálogo entre os alunos a propósito dos erros cometidos nas resoluções de problemas. Este tipo de exploração do erro e de reconhecimento da sua origem teve progressivamente uma maior importância no decorrer das aulas de Matemática.

A promoção do diálogo entre os alunos, sem a constante mediação da professora, para além das dinâmicas de trabalho a pares ou em grupo, começou a surgir em diversas aulas, na apresentação e discussão em grupo turma das actividades realizadas na sala. O próximo episódio refere-se também a uma aula do 2.º ano, em que foi trabalhado o conceito de área, pela primeira vez. Os alunos mostraram uma crescente autonomia na discussão das suas próprias ideias matemáticas e na confrontação das suas concepções matemáticas.

A Laura incentivou-os a justificar os seus raciocínios e pontos de vista a partir de questões direccionadas para a tarefa matemática e de inquirição sobre os resultados obtidos. Os alunos vão construindo o conhecimento ao negociarem o significado de conservação de área após o fazer e o refazer de diferentes figuras com o mesmo número de quadrados:

Professora: – Quanto é que mede agora de área?
Márcia: – Dez.
Professora: – É igual às outras?
Márcia: – Não.
Professora: – Essa ocupa mais, não ocupa? Aquela, deles, ocupa mais?
A professora tenta seguir o raciocínio errado da aluna com vista à exploração da concepção errada e à compreensão dos seus significados a propósito da área de diferentes figuras com o mesmo número de quadrados. Esta intervenção da professora originou um importante momento de argumentação e contra-argumentação entre os alunos a propósito do conceito de conservação de área.
Professora: – *Ocupa mais?*
Lara: – *Não, ocupa o mesmo que tu tinhas porque utilizaste todos os quadrados que tinhas. Nós também utilizámos todas as figuras e temos o mesmo, tu também utilizaste nove…*
Márcia: – *Dez.*
André: – *Utilizaste outra vez dez, tem o mesmo tamanho, está igual.*
Lara: – *Tem o mesmo espaço de área.*
Márcia: – *Pode ocupar mais ou menos.*
Lara: – *Mas não, mas tu ocupas o mesmo espaço de área, porque são dez e são todos os mesmos. Ocupas, ocupas. Se é tudo igual. Não, igual todas as áreas. É tudo dez.*
Professora: – *Já fez quantas figuras diferentes?*
Lara: – *Três.*
Professora: – *E…*
Lara: – *Todas ocupavam o mesmo espaço, a mesma área. Porque tinham os mesmos quadrados. Porque utilizámos todos os quadrados.*
Márcia: – *Mas umas* [figuras] *estavam mais espalhadas e outras menos espalhadas.*
Lara: – *Sim, mas isso não tem a ver, porque tu estavas a utilizar os mesmos quadrados.*
Professora: – *Vá, Márcia, diz lá o que é que achas!*
[Aula, Abril 2008]

A interacção entre alunos com opiniões diferentes sobre uma mesma situação decorre sem a mediação da professora, denotando uma crescente autonomia por parte destes na construção do conhecimento matemático. Nesta situação, os alunos encontram-se em igual posição, argumentando sem assumirem um papel activo ou passivo no discurso, numa conversação com vista ao entendimento, em que confrontam concepções matemáticas prévias sobre o conceito de área de uma superfície plana.

Interiorização de novas práticas

A promoção da comunicação matemática, enquanto interacção social, foi progressivamente assumida pela professora como uma mais-valia na aprendizagem dos alunos. Neste sentido, a professora desenvolveu uma atitude de maior promoção do discurso dos alunos, através da cedência de mais tempo para a comunicação e da valorização das suas ideias e opiniões.

As concepções de Laura sobre a comunicação matemática foram integrando alguns aspectos relacionados com a interacção social, com o conhecimento dos alunos e a sua capacidade cognitiva de aprender. Neste sentido, a professora assumiu uma maior proximidade entre os processos de interacção em sala de aula e a construção do conhecimento matemático, dando primazia aos conhecimentos prévios dos alunos e aos momentos de interacção comunicativa.

Laura reconhece e valoriza a alteração de atitude dos alunos na comunicação, realçando uma crescente autonomia destes no processo de aprendizagem, nomeadamente na discussão e validação das suas estratégias e resultados:

São eles entre eles que dizem se está certo ou errado. (…) São os próprios que validam as ideias dos colegas e dizem o que está errado ou não. [Entrevista, Fevereiro 2009]

A crescente autonomia dos alunos parece ter resultado de uma atitude de valorização dos conhecimentos prévios e construídos pelos alunos:

> Já os deixo pensar. (…) Era a tal coisa: vinham ali e «Está errado». Era aquela coisa de dizer que estava errado e nem esperava por mais nada. Agora já não. É diferente. Espera-se ali «Então explica lá melhor», «Então porque é que tu fazes isto?», «Como é que foi?» [Entrevista, Fevereiro 2009]

A Laura passou a assumir uma postura mais interactiva e menos transmissiva. Esta mudança de práticas parece ter gerado uma significativa mudança no discurso e no assumir do aluno como um parceiro comunicativo activo do processo de ensino-aprendizagem. Este reconhecimento do *outro* como conhecedor reflectiu-se no seu próprio conhecimento pessoal e profissional.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

As práticas de comunicação matemática na sala de aula da professora Laura parecem ter extravasado uma visão transmissiva, ao integrarem elementos característicos das perspectivas de interacção da comunicação. Na sequência da implementação de novas estratégias educativas a professora foi dando mais espaço e tempo aos momentos de comunicação em sala de aula, resultando uma maior atenção da professora sobre as produções matemáticas dos alunos.

Progressivamente, a professora deu maior relevância ao papel do erro e ao conhecimento prévio e construído pelos alunos, deixando-os assumir um maior protagonismo na sua aprendizagem. Esta alteração originou uma maior autonomia por parte dos alunos na validação dos resultados e estratégias de resolução das tarefas matemáticas e na argumentação e contra-argumentação matemática em sala de aula.

As interacções entre os alunos assumiram um maior protagonismo no decorrer dos momentos de apresentação e discussão das estratégias e resultados das tarefas matemáticas, revelando um progressivo respeito pela partilha entre os alunos das suas ideias e opiniões matemáticas. Esta interacção entre os alunos foi intencionalmente alimentada pela professora, através da introdução de incentivos à participação dos alunos no discurso colectivo do grupo turma.

O significativo aumento da intervenção dos alunos na comunicação matemática em sala de aula contribuiu também para uma maior consciencialização, por parte da professora, da importância dos conhecimentos prévios dos alunos e das suas estratégias pessoais, a par de um maior conhecimento sobre a natureza dos erros e das concepções erradas dos alunos a propósito de conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

Arlo, H. e Skovsmose, O. (2006). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Beaudichon, J. (2001). *A Comunicação. Processos, formas e aplicações*. Porto: Porto Editora.

Belchior, F. (2003). Pedagogia, comunicação e existência. *Revista Portuguesa de Pedagogia*, ano 37, nº 3, 197-230.

Berlo, D. (2003). *O Processo de Comunicação. Introdução à Teoria e à Prática.* São Paulo: Martins Fontes. (Edição original em inglês, 1960)

Bitti P. e Zani, B. (1997). *A Comunicação como Processo Social*. Lisboa: Editorial Estampa. (Edição original em italiano, 1983).

Bordenave, J. (1995). Comunicação e desenvolvimento social: o novo paradigma. In Neiva, M. e Rector, E. (Orgs.) *Comunicação na Era Pós-Moderna.* (pp. 229-237). Petrópolis, RJ: Editora Vozes.

Brendefur, J. e Frykholm, J. (2000). Promoting Mathematical Communication in the Classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 3, 125-153.

DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: Departamento de Educação Básica/Ministério da Educação.

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular/Ministério da Educação.

Fiske, J. (2005). *Introdução ao Estudo da Comunicação*. Porto: Edições Asa. (Edição original em inglês, 1990).

Godino, J., e Llinares, S. (2000). El Interaccionismo Simbólico en Educación Matemática. *Revista Educación Matemática,* Vol. 12, nº 1, 70-92.

Goetz, J. e LeCompte, M (1984). Analysis and Interpretation of Data. *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*. (pp. 164-207). *Orlando*: Academic Press, Inc.

Habermas, J. (2004). *Pensamento Pós-Metafísico.* Coimbra: Almedina.

Habermas, J. (2006). *Técnica e Ciência como "Ideologia"*. Lisboa: Edições 70. (Edição original em alemão, 1968)

McQuail, D. (1984). *Communication.* London and New York: Longman.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional (Edição original em inglês, 1989).

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (Edição original em inglês, 2000).

Rüdiger, F. (2004). *Introdução à Teoria da Comunicação.* São Paulo: Edicon.

Sfez, L. (1991). *A Comunicação.* Lisboa: Instituto Piaget.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi, e A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Stake, R. (1994). Case studies. In. Dezin, N. e Lincoln, Y. (Eds.) *Handbook of qualitative research.* Londres: Sage Publications.

Stake, R. (2000). Case studies. In. Dezin, N. e Lincoln, Y. (Eds.) *Handbook of qualitative research. Second Edition.* (pp. 435-454). Londres: Sage Publications.

Thompson, A. (1984). The Relationship of Teachers' Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice. Educational Studies in Mathematics, 5(2) 105-127.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan, pp. 127-146.

Práticas comunicativas de uma professora de Matemática

C. Miguel Ribeiro*, José Carrillo*,
U. Algarve, Centro de Investigação sobre Espaços e Organizações
Rute Monteiro
Universidade de Huelva

RESUMO

O tipo de comunicação que utilizamos no decurso das aulas fornece indícios sobre a forma como encaramos todo o processo de ensino e como desenvolvemos a nossa actividade docente. Acreditamos que uma prática associada a diversos tipos de comunicação exterioriza, entre outros, os distintos tipos de objectivos que perseguimos e crenças que possuímos relativamente a todo o processo.

Neste texto, analisamos e discutimos a prática comunicativa de uma professora do 1.º Ciclo em três fases distintas ao longo do ano, focando as alterações que se verificaram, ou não, na forma como utiliza a comunicação matemática com os alunos, as relações dessa comunicação com as suas crenças, objectivos e o impacto destas na sua prática. Da análise da prática ao longo do ano, a primeira fase permite-nos afirmar que a professora sustentava a sua prática matemática num modelo comunicativo, fundamentalmente, transmissivo; na fase seguinte passa a possuir como pólo unificador o recurso a uma comunicação matemática contributiva e reflexiva. Na última fase, verifica-se algum “retrocesso” nas práticas comunicativas da professora, o que poderá estar relacionado, entre outros aspectos, com a busca de um estado de equilíbrio entre o que fazia e os produtos das reflexões realizadas. Os resultados salientam, também, o facto de determinadas maneiras de comunicar na aula poderem constituir-se como obstáculos à persecução de certos objectivos.

A forma como o professor comunica com os outros (os alunos) fornece inúmeras informações sobre si próprio e a forma como se encara a si e a todo o processo de ensino. Fornece, ainda, indícios sobre a sua postura relativamente a cada assunto bem como o à vontade, ou não, com que se relaciona com este, assumindo a forma como comunica com os alunos um importante papel no que efectivamente os alunos aprendem (Lampert e Blunk, 1998).

Diferentes tipos de comunicação levam a que as situações na sala de aula decorram de formas distintas, sendo, portanto, as acções do professor executadas de forma também diferente, o que pode conduzir a distintos *outputs*. Estes tipos de comunicação encontram-se também relacionados com

---

* Ribeiro, Carrillo e Monteiro são membros do Projecto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), Dirección General de Investigación y Gestión del Plan Nacional de I+D+i. Ministerio de Ciencia e Innovación (Espanha).

as suas crenças (Crespo, 2003) pois o modo como comunica poderá evidenciar distintas formas de assumir o processo de ensino-aprendizagem, o seu papel enquanto professor, os alunos, os recursos/metodologia e a matemática escolar.

Encaramos o ensino da matemática como um discurso multimodal onde têm lugar diferentes formas de comunicar, tais como a linguagem verbal, notações algébricas ou formas visuais e gestos e, tal como Potari e Jaworski (2002), consideramos a comunicação matemática, que o professor utiliza, como uma das bases do estudo do processo de ensino e seus resultados, mas também de análise da forma como a influencia, e é influenciada, na e pela prática. Nesse sentido, e no âmbito deste texto, focar-nos-emos apenas na comunicação matemática verbal, assumindo os diferentes tipos apresentados por Brendefur e Frykholm (2000).

Neste texto, parte integrante de uma investigação mais ampla subordinada ao estudo do desenvolvimento profissional de duas professoras do 1.º Ciclo, temos por intuito apresentar e discutir alguns aspectos do desenvolvimento profissional de Ana, nomeadamente no que concerne aos tipos de comunicação a que recorre, aos objectivos que define, crenças que evidencia e às inter-relações que ocorrem entre estes. Nesse sentido, analisamos as alterações que se verificam, ou não, na sua prática, ao longo de um ano lectivo, tendo ocorrido, em parte desse período, um trabalho colaborativo entre as professoras e o primeiro autor deste texto.

ALGUMAS NOTAS TEÓRICAS

O processo de ensino pode decorrer de distintas formas, dependendo do papel desempenhado pelo professor, pois cumpre-lhe a ele tomar as decisões que influenciam directamente todo o processo. Essas decisões são exteriorizadas de distintos modos, tais como seja, o tipo de comunicação matemática, os objectivos que persegue e as crenças que revela. Apresentamos, de seguida, a forma como cada uma destas dimensões é encarada neste texto.

Tipos de comunicação

Existem diversas teorias de comunicação, dependendo da área em que nos movemos. Elegemos a perspectiva da comunicação como um processo de interacção social (Belchior, 2003; Ferin, 2002), mas cingimo-nos apenas ao professor, sem discutir o tipo de interacções entre os alunos e a sua importância no processo de ensino. Para o âmbito deste artigo, centrando-nos especificamente no tipo de comunicação oral do professor, consideramos a classificação proposta por Brendefur e Frykholm (2000) (que definem quatro tipos de comunicação matemática) complementada com algumas adaptações de Carrillo, Climent, Gorgorió, Rojas e Prat (2008).

Saliente-se o facto de considerarmos que, durante uma aula, a comunicação não é necessariamente toda do mesmo tipo. A identificação, em cada situação concreta (episódio), efectua-se pelo modo predominante de comunicação matemática verificado, não contabilizado de forma numérica, mas sim pela importância que assume para a persecução dos objectivos que persegue.

Os quatro tipos de comunicação matemática propostos por Brendefur e Frykholm (2000) são: comunicação unidireccional, contributiva, reflexiva e instrutiva.

A comunicação unidireccional associa-se ao tipo de ensino em que o professor é protagonista do processo, competindo ao aluno reproduzir textualmente o que ouve. É o tipo de comunicação característico do ensino tradicional, em que o professor questiona, o aluno responde e o professor avalia a resposta dada. A comunicação contributiva reconhece já ao aluno uma participação no decurso da aula, ainda que singela (os alunos interagem entre si e com o professor, cuja interacção é de natureza correctiva e não conteudística). A comunicação reflexiva caracteriza-se pelo facto de as interacções na sala de aula, entre alunos e professor, serem a origem das investigações a ocorrer. Incluímos neste tipo de comunicação a pretensão de modificar a compreensão matemática dos alunos (considerada por Brendefur e Frykholm (2000) na comunicação instrutiva), pois pensamos que este atributo caracteriza as actividades de investigação que lhes são facultadas (Carrillo, et al., 2008). A comunicação instrutiva, para além do que ocorre na comunicação reflexiva, pretende ainda esclarecer o tipo de tarefa/conteúdo que se irá realizar seguidamente. Caracteriza-se também pela integração no processo das ideias dos alunos – avanços e dificuldades – manifestadas ou intuídas, tanto pelo professor como pelos próprios alunos.

Objectivos

Coincidimos com Schoenfeld (1998b) ao definirmos por objectivo algo que se pretende atingir. Estes podem ser perspectivados a curto ou a médio/longo prazo e ser implícitos ou explícitos, pré-determinados ou emergentes, encontrando-se, estes últimos, associados a improvisações de conteúdo (Ribeiro, Monteiro e Carrillo, 2009). Considerando o indivíduo como um ser completo, seguindo a linha de Saxe (1991), defendemos que todos somos capazes de construir, adaptar, modelar e remodelar os nossos próprios objectivos, de acordo com o nosso próprio percurso, experiências, vivências e conhecimentos. Por outro lado, os objectivos não podem ser encarados isoladamente, fazem parte de um sistema mais vasto, englobam as restantes cognições (conhecimentos e crenças), formando cada dimensão um sistema próprio que, em conjunto, se auto-influenciam e à prática (Ribeiro, Carrillo e Monteiro, 2009).

No âmbito da investigação mais ampla, da qual esta é parte, os objectivos assumem um lugar de destaque, pois são eles (os da professora) que determinam as unidades de análise, que denominamos também por episódios.

No caso da professora a que nos referimos aqui (Ana), ao longo do período em análise, foram identificados objectivos de revisão, consolidação, apresentação e construção (permitir que os alunos construam os conteúdos), que correspondem aos quatro *clusters*[2] levados à prática.

Crenças

As crenças dos professores relativamente à matemática e a todo o processo de ensino-aprendizagem desempenham um importante papel nas suas próprias práticas (e.g. Thompson, 1992), pois são elas que influenciam o professor na selecção e priorização de objectivos (e acções). Tal como para os objectivos, e na linha do que referem Stuart e Thurlow (2000), consideramos as crenças organizadas em forma de sistema.

Para efectuar a identificação e análise das crenças dos professores, durante a prática, recorremos ao instrumento de Climent (2005), onde a autora apresenta um conjunto de indicadores de crenças de professores dos primeiros seis anos de escolaridade, relativamente a crenças sobre metodologia, matemática escolar, aprendizagem, papel dos alunos e papel do professor.[3]

Por estes indicadores se encontrarem associados às acções que o professor realiza, são encaradas como manifestações de crenças, que são exteriorizadas não apenas pelas acções mas também/fundamentalmente, pelo tipo de comunicação matemática promovida e pelos objectivos que persegue.

CONTEXTO E METODOLOGIA

Tal como foi já referido, este texto é parte integrante de uma investigação mais ampla subordinada ao estudo do desenvolvimento profissional de Maria e Ana, duas professoras do 1.º Ciclo, onde se pretende investigar também o papel e influência das suas cognições[4] no processo de ensino (exteriorizadas pelo tipo de comunicação empregue), e que alterações se verificam, ou não, ao longo de um ano lectivo, tendo ocorrido, em parte desse período, um trabalho colaborativo envolvendo ambas as professoras e o primeiro autor. Aqui referir-nos-emos apenas à prática da professora Ana (com seis anos de

---

[2] São aqui assumidos como conjunto de situações agrupadas pelo tipo de objectivos. Podem ser também considerados os tipos de comunicação utilizados.

[3] Metodologia (prática lectiva, actividades de sala de aula, fontes de informação, diferenciação individual, utilização de materiais manipulativos, objectivos do processo de ensino e programação); matemática escolar (orientação, conteúdo, como é considerada e finalidade); aprendizagem (como se realiza, de que forma se realiza, que processos se utilizam, qual é o papel/importância da argumentação dos alunos, interacções professor/alunos/matéria, tipos de agrupamento); o papel dos alunos (participação na planificação, responsabilidade pela aprendizagem – chave de transferência ensino-aprendizagem, o que faz, como o faz e para que o faz) e o papel do professor (o que faz/como o faz/metodologia ou atitude pedagógica/como actua e relativas à validação da informação).

[4] Neste texto focar-nos-emos somente nas crenças e objectivos evidenciados na prática.

experiência) analisando e discutindo, em particular, o que ocorre nessa prática do ponto de vista dos tipos de comunicação que utiliza e de que forma estes se encontram associados aos seus objectivos e às crenças que manifesta.

A investigação baseia-se num estudo de casos, com uma metodologia de cariz interpretativo. A recolha de dados ocorreu com recurso à gravação áudio e vídeo das aulas (Sherin e Hans, 2004), complementarmente à observação *in situ*, centradas nas professoras, em três fases. Foram ainda tidas conversas informais antes e após cada aula, que permitirem obter a antevisão das professoras sobre o que iria e como iria decorrer a aula e complementar as primeiras análises efectuadas. Estas fases associam-se à introdução de conteúdos distintos, correspondendo a segunda às aulas que reflectem a sequência de tarefas preparadas e discutidas no âmbito do grupo colaborativo. Reportam-se à introdução do conceito de milésima (1.ª fase – Novembro); das medidas de área (m^2, dm^2, cm^2 e mm^2) e das fórmulas da área do rectângulo e triângulo (rectângulo) (2.ª fase – Março), e conteúdos de Organização e tratamento de dados (Otd) (3.ª fase – Maio).

Para efectuar a análise da prática foi elaborado um modelo cognitivo[5]. A divisão da aula em episódios encontra-se subjacente à ideia de considerar o período de uma aula como um todo, que pode ser dividido em várias secções fenomenologicamente coerentes (Schoenfeld, 1998a) e que estão directamente relacionadas com os objectivos que o professor possui em cada momento. Nestes episódios, identificámos ainda as restantes cognições (crenças e conhecimentos), o tipo de comunicação matemática utilizado pela professora, a forma de trabalho dos alunos[6] e os recursos[7] utilizados em cada situação concreta. A identificação, a partir da prática, e inclusão no processo de análise também destas dimensões não cognitivas teve por intuito possibilitar uma mais clara diferenciação e profícua análise à prática da professora possibilitando diferenciar situações que, à primeira vista (análise) poderiam parecer similares mas que ocorriam, efectivamente de formas distintas, possibilitando assim um refinamento e maior minúcia nessa análise.

Após a elaboração do modelo de ensino da professora (em cada fase), um segundo nível de análise permitiu obter relações entre as suas diversas dimensões. Algumas dessas relações, e sua evolução, serão discutidas na epígrafe seguinte, assumindo uma perspectiva onde o tipo de comunicação desempenha um papel transversal, pois influencia e é influenciado pelas restantes dimensões.

---

[5] Para mais informações sobre esse modelo e o processo de elaboração consultar, por exemplo, Ribeiro (2009).

[6] Durante as três fases de trabalho a professora permite que os alunos trabalhem em grande grupo (G); grande grupo e individualmente (GI); grande grupo mas individualmente (Gi) e individualmente e em grande grupo (IG) e em grupos (quartetos) (Gs).

[7] Na sua prática Ana recorreu, de forma isolada ou conjunta, aos seguintes recursos: Diálogo (D); Quadro (Q); Jogo (J); Modelo (M); Ficha de trabalho (Ft); Material manipulável (Mm); Caderno diário (Cd); Desenho no quadro (Dq).

Assim, na tentativa de concretizar o objectivo traçado para este texto, apresentamos e analisamos as relações emergentes, envolvendo os tipos de comunicação matemática, objectivos e crenças (manifestações de crenças). Centrados nos tipos de comunicação, discutiremos ainda de que forma estes ocorrem, qual a relação com as restantes dimensões, de que forma se "movimentam" entre as fases, numa perspectiva de análise contínua e transversal a todo o período em análise, e qual o papel e impacto da sua alteração, ou não, na prática lectiva de Ana.

TIPOS DE COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA UTILIZADOS E SUA RELAÇÃO COM CRENÇAS E OBJECTIVOS

O foco no tipo de comunicação utilizado e no modo como as relações com os objectivos e crenças se vão alterando ao longo do tempo, permite-nos obter uma visão da exteriorização dessas cognições de Ana de uma forma indirecta. Esta perspectiva indirecta e o caminho percorrido ao longo das distintas fases, provem uma ideia da trajectória efectuada pela professora em termos da importância que atribui ao seu papel e ao dos alunos e também das oportunidades de aprender que lhes faculta.

Sintetizam-se abaixo as ocorrências de cada um dos tipos de comunicação utilizados por Ana e das relações com os diferentes tipos de episódios/objectivos, formas de trabalho e recursos, que reflectem também as crenças associadas. Nesta síntese, dois tipos de leituras podem ser efectuadas, tanto em termos horizontais como verticais, correspondendo cada uma dessas leituras a visões distintas. No primeiro caso, é possível seguir o percurso da professora associado a um determinado tipo de comunicação matemática ao longo das três fases de trabalho, enquanto que através do segundo, torna-se evidente a predominância ou inexistência desse tipo de comunicação em cada fase.

Tabela 1 – Ocorrências da comunicação unidireccional em cada uma das três fases de trabalho.

Tipo de comunicação	Episódios (Objectivos)	Forma de trabalho	Recursos	1.ª fase	2.ª fase	3.ª fase
Unidireccional	Revisão	G	D	X		
			Mm	X		
	Apresentação		QMm	X		
			CdQFt	X		
	Consolidação		Q	X		
			Ft	X		
			QMm	X		

A comunicação unidireccional restringe-se exclusivamente à primeira fase de trabalho, associada a episódios de revisão, apresentação e consolidação (os três tipos de objectivos que Ana persegue nessa fase), sendo todos eles levados a cabo em grande grupo. Este tipo de comunicação matemática está *aqui* associado a objectivos imediatos, de reprodução, e relacionados unicamente com o tema de Números e Operações[8].

As suas ocorrências, pela forma como são desenroladas (para o grande grupo e utilizando recursos onde a professora é a dinamizadora primordial – mesmo o material manipulável encontra-se associado à manipulação pela manipulação, como forma de mostrar a veracidade do expresso) revelam crenças associadas, primordialmente, ao facto de assumir, nesta fase, que deve ser ela, enquanto professora, a validar a informação que se mobiliza na aula, onde a verdadeira aprendizagem tem de ser apoiada por um processo dedutivo, apesar de ser uma construção simulada e onde os alunos devem repetir, integralmente, o que ela fez.

O facto de eliminar, nas fases seguintes, este tipo de comunicação (e as crenças e tipos de objectivos – imediatos – que se lhe encontram associados) poderá ser resultado do trabalho colaborativo e das subsequentes discussões e reflexões ocorridas (entre a primeira e segunda fases), tomando, por via destas, consciência da forma como encarava o processo de ensino-aprendizagem e efectuando um esforço para alterar a sua actuação.[9]

Tabela 2 – Ocorrências da comunicação contributiva em cada uma das três fases de trabalho.

Tipo de comunicação	**Episódios (Objectivos)**	**Forma de trabalho**	**Recursos**	**1.ª fase**	**2.ª fase**	**3.ª fase**
Contributiva	Revisão	G	D	X	X	X
			Q	X		X
			Ft, Mm, MQ, QM, FtQ	X		
			MmQ		X	
		GI	FtQ	X		
		Gi	Mm, MmQ		X	
	Apresentação	G	Mm, QCd	X		
			D		X	X
			QMm,		X	

[8] Recorde-se que a primeira fase corresponde à introdução do conceito de milésima.
[9] Também relacionado, obviamente, com o conhecimento matemático para ensinar que assume possuir relativamente aos conteúdos que aborda.

			MmQFt			
			D, Q, FtQ, FtCd, FtDq, FtMm, QFt	X		
	Consolidação	GI	FtQ	X	X	
		Gs	JQ	X		
		IG	JQ, JQMm	X		

Este é o único tipo de comunicação matemática que se verifica simultaneamente nas três fases, assumindo uma relativa *estabilidade* ao longo de todo o processo. Existem, ainda, situações novas nas duas primeiras e algumas outras que se repetem entre fases (aquelas onde Ana, presumivelmente, se sente mais à-vontade).

Ana comunica contributivamente com maior incidência durante as duas primeiras fases (na terceira apenas é utilizada com o intuito de rever ou apresentar o conteúdo recorrendo ao quadro ou ao diálogo). Reduz progressivamente a utilização deste tipo de comunicação, verificando-se na última fase a ocorrência de apenas três tipos de objectivos que ocorrem desta forma e pertencem aos *clusters* de revisão e apresentação. Esta redução (na segunda e terceira fases), similarmente ao facto de utilizar a comunicação unidireccional na primeira fase, indicia uma alteração na sua prática, possibilitando uma maior participação e responsabilização dos alunos no decurso da aula, reduzindo, portanto, as suas intervenções, e preparando tarefas que pretendem ser desafiadoras e que não permitam apenas mostrar os conteúdos na sua forma final.

As situações de revisão e apresentação que ocorrem deste modo baseiam-se em crenças similares às que ocorrem de forma unidireccional, assumindo que deve ser a professora a validar a informação e que aos alunos apenas compete reproduzirem o que foi dito ou mostrado. Porém, as situações de consolidação contributiva encontram-se associadas a uma acção base que demonstra o facto de Ana revelar assumir que a argumentação dos alunos, pelas suas próprias palavras, mostra o resultado da aprendizagem (demonstração da compreensão dos conteúdos) e não apenas como uma mera reprodução do que foi dito ou mostrado (que ocorria quando unidireccionalmente).

A comunicação reflexiva emerge na segunda fase e cerca de metade das situações que se verificam na terceira ocorriam já na fase anterior. É um tipo de comunicação que ocorre nos quatro tipos de episódios consumados (objectivos perseguidos), sendo que uma grande parte das situações (quando comparando com os demais tipos de comunicação matemática) corresponde a improvisações (objectivos emergentes). [10] Cinco tipos distintos de situações ocorrem simultaneamente nas duas fases, mas apenas uma dessas situações não ocorre exclusivamente em grande grupo mas sim em grande grupo e individualmente e diz respeito à consolidação, tendo como recurso o jogo.

Tabela 3 – Ocorrências comunicação reflexiva em cada uma das três fases de trabalho.

Tipo de comunicação	**Episódios (Objectivos)**	**Forma de trabalho**	**Recursos**	**1.ª fase**	**2.ª fase**	**3.ª fase**
Reflexiva	Revisão	G	D		X	X
			Q, Mm,		X	
	Apresentação		D, Mm, MmQ		X	
			Q		X	X
			QFt			X
	Consolidação		D, Q, Mm, QMm, CdQ, QMmCd		X	
			Ft			X
			MmQ		X	X
			MmFt			X
		Gi	Cp			X
		Gs	J		X	X
	Construção	G	MmQ		X	X
			QFt		X	
			MmFt			X

[10] Durante a segunda fase 34% (dez de entre vinte e nove) dos episódios que a professora leva a cabo correspondem a improvisações de conteúdo, sendo que nenhuma dessas improvisações ocorre associada a uma construção de conteúdo. Essas ocorrências são distribuídas de forma distinta entre os diferentes *clusters* de objectivos. Assim, 50% (três em seis) correspondem a revisões, 22% (duas em nove) a apresentações e 41% (cinco em doze) a consolidações de conteúdo. Durante a terceira fase apenas se verifica uma situação de improvisação e ocorre com recurso ao diálogo, correspondendo, assim, a 10% das ocorrências.

O elevado número de improvisações, que ocorre na segunda fase, associado a uma comunicação reflexiva poderá indiciar que Ana tenta, mesmo nessas situações imprevistas, facultar aos alunos um papel mais relevante associado a tarefas que assume possuírem potencialidade de promover a sua compreensão matemática.

Das novas situações que ocorrem na terceira fase, apenas uma não se refere à utilização da ficha de trabalho e é também a única que não se verifica em grande grupo, ocorrendo em grupo mas individualmente e utilizando o computador, o que revela também o grande peso do recurso à ficha de trabalho na sua prática.

Este tipo de comunicação ocorre associado aos quatro *clusters* de objectivos perseguidos, encontrando-se assim relacionado, fundamentalmente com o facto de Ana assumir que a aprendizagem pode ser produzida partindo da participação activa do aluno em processos indutivos. Considera importante que estes comuniquem e argumentem, de um modo mais ou menos justificado as suas conclusões, sendo a informação que se mobiliza na aula válida para o grupo (grupo classe ou pequenos grupos de trabalho).

Nestas situações, durante a segunda fase, atende implicitamente (apesar de não planificada) à diferenciação individual, revelando pretender que a aprendizagem ocorra por construção espontânea onde o aluno interactua com a matéria, com a professora e com os colegas, mas o ênfase é colocado na interacção com os colegas e a professora. Revela, assim, assumir que o aluno deve passar de actividade em actividade, participando intensamente em cada uma delas, não dispondo, no entanto, de tempo para a reflexão sobre a sua própria acção e, por estar envolvido num ambiente dinâmico, deve comunicar as suas experiências e sentimentos com o professor e com os colegas.

Estas crenças (evidenciadas pelas suas acções) são complementadas, na terceira fase, com crenças relativas à metodologia, aprendizagem e papel dos alunos, encontrando-se associadas a acções que ocorrem, essencialmente, nos episódios de construção do conteúdo. Demonstra, aí, considerar que a capacidade e atitude dos alunos podem ser modificadas, provindo essa modificação da motivação originária na própria acção. Essa modificação é a chave para os bons resultados da aprendizagem, sendo, para isso, fundamental que se definam os objectivos como um marco genérico de actuação, assumindo, portanto, uma dimensão flexível.

A comunicação instrutiva ocorre apenas na segunda fase e associada sempre ao trabalho em grupos com recurso ao material manipulável e quadro. Esta utilização exclusiva poderá estar associada ao facto de, durante esta fase, as tarefas terem sido preparadas no âmbito do grupo colaborativo, tendo sido discutidas diferentes formas possíveis de as abordar, mantendo o seu nível cognitivo (no sentido do considerado por Stein, Smith, Henningsen e Silver, 2000). Isto poderá ter levado a professora a sentir-se mais à vontade no seu papel (apesar desse nível cognitivo não ter sido sempre mantido), possibilitando os diálogos interactivos ou não planeados, sendo a direcção destes fornecida pelos alunos, e em que ela considera útil e necessário um esclarecimento, construção de conteúdo, ou negociação de significados. Isto ocorre ainda com "maior intensidade" na situação de consolidação (e.g. consolidar a diferença entre valor estimado e valor medido), uma vez que esta corresponde a uma improvisação.

Tabela 4 – Ocorrências da comunicação Instrutiva em cada uma das três fases de trabalho.

Tipo de comunicação	**Episódios (Objectivos)**	**Forma de trabalho**	**Recursos**	**1.ª fase**	**2.ª fase**	**3.ª fase**
Instrutiva	Consolidação	Gs	MmQFt		X	
	Construção		MmQ, MmFtQ		X	

As tarefas a que recorre podem ser consideradas do tipo novo (Doyle, 1988) e matematicamente desafiadoras, o que conduz, expectavelmente, a uma modificação da sua compreensão matemática, permitindo também informar sobre a instrução seguinte. Ana, ao perseguir os objectivos desta forma, atende explicitamente à diferenciação individual propondo diferentes níveis de dificuldade nas tarefas, institucionalizando o processo de aprendizagem onde a informação que se forma/cria na aula é validada pelo grupo, pela professora, ou pelo próprio aluno, potenciando a reflexão destes e onde todos assumem a responsabilidade de julgar a adequação das suas ideias e são responsáveis pelas aprendizagens de todos.

ALGUMAS NOTAS FINAIS

A análise da prática de Ana, focada nos tipos de comunicação que utiliza, permitiu obter uma visão não apenas da alteração que se verificou e das relações subsequentes com as crenças e objectivos que possui (associada ao facto de ter decorrido um trabalho colaborativo focado na discussão e reflexão sobre a prática "anterior" e preparação de uma sequência de tarefas de introdução a um conteúdo), mas também quais os aspectos que se mantiveram inalteráveis.

Durante a primeira fase (*Estado da Arte*), a prática de Ana pode ser caracterizada por se fundamentar em situações associadas a objectivos de revisão e consolidação do conteúdo (intercaladas nas quais efectua a apresentação de um novo conteúdo), sempre associadas a uma comunicação matemática unidireccional ou contributiva. A sua prática é, assim, baseada numa avaliação das aprendizagens, avaliação essa que toma a forma de revisão e consolidação, assumindo o papel primordial em todo o processo de ensino, cumprindo aos alunos apenas replicarem o que foi abordado, e onde a repetição de exercícios tipo é a forma que lhes permite aprender (Ribeiro, em preparação).

É provável que alguns professores considerem que é adequado ensinar de forma centrada em si, sem dar oportunidade de intervenção aos alunos, assumindo estes um papel diminuto em todo o processo, pois, se os próprios professores aprenderam desta forma e tiveram sucesso (são hoje professores), não têm evidências da necessidade de alteração dessas práticas às quais foram sujeitos (Wilkins, 2008).

Na segunda fase, que reflecte o trabalho desenvolvido no grupo colaborativo, eclipsa a comunicação unidireccional e utiliza fundamentalmente a comunicação contributiva e reflexiva para rever ou apresentar os conteúdos, recorrendo à reflexiva e instrutiva nas situações de construção e aos três tipos para consolidar. O pólo unificador é, assim, o recurso a uma comunicação matemática contributiva e reflexiva.

A professora opta por uma comunicação matemática maioritariamente reflexiva na última fase (ao rever e apresentar utiliza também uma comunicação contributiva, mas sem expressão na globalidade das situações observadas). É de salientar esta opção, pois preferiu, nesta última fase (onde as aulas foram preparadas pelas professoras sem o apoio do grupo colaborativo), este tipo de abordagem ao processo de ensino, tentando, também dessa forma, manter o nível cognitivo das tarefas preparadas.

Assim, podemos referir que a um nível macro a sua prática sofre diversas alterações ao longo do período de recolha de dados. Esta alteração verifica-se tanto a nível dos tipos de episódios (objectivos) que persegue[11] como da forma como o faz: passa de um processo de ensino com um foco bastante centrado em si (associado exclusivamente a uma comunicação unidireccional e contributiva) para uma prática em que denota um elevado nível de preocupação onde, de modo geral, os alunos são chamados a participar no desenvolvimento da aula (conjugando uma comunicação contributiva, reflexiva e instrutiva) e terminando, na terceira fase, com uma mescla destes dois processos (mas recorrendo, aqui, apenas a uma comunicação contributiva e reflexiva).

Se considerarmos que as alterações da primeira para a segunda fase foram resultado do trabalho colaborativo, então, a prática da terceira fase é consistente com o que é referido na teoria sobre o facto de os professores demorarem um vasto período de tempo a apropriarem-se das situações e de

[11] Na primeira fase Ana persegue apenas objectivos imediatos e de revisão, apresentação e consolidação, emergindo, na segunda fase, e mantendo-se na última os de construção (que ocorrem sempre de forma reflexiva ou instrutiva) que, pela sua natureza, são mais demorados (tomam mais tempo do dedicado à matemática) e envolvem um conjunto distinto de cognições, o que leva também a uma diminuição dos demais tipos de objectivos.

que a alteração das práticas não é imediata. Porém, é de salientar que, ainda assim, muitas das ocorrências que se verificaram na terceira fase – tanto a nível macro como micro – reflectem tópicos das discussões e reflexões ocorridas durante o trabalho colaborativo (que teve por base a prática das professoras e os momentos considerados por estas e pelo investigador como sendo matematicamente críticos). O não recorrer à comunicação instrutiva na terceira fase poderá estar relacionado com a falta de apoio por parte de um grupo de trabalho (em oposição ao que aconteceu durante a segunda), com o tipo de conteúdos matemáticos abordados (Otd), pois poderá sentir alguma falta de à-vontade relativamente aos mesmos, ou com uma busca de um estado de equilíbrio entre o que fazia e os produtos das reflexões realizadas.

A um nível *micro* verificam-se bastantes alterações entre os objectivos, indicadores de crenças e tipos de comunicação utilizados ao longo das três fases e em cada situação em particular. No que concerne aos objectivos, estes passaram a poder ser referidos mais em termos das relações entre os alunos e a matéria do que com a professora (patente com a emergência dos objectivos de construção do conteúdo), o que se reflecte, ou é reflexão, das crenças desta sobre o processo de ensino, o seu papel e o dos alunos bem como do tipo de tarefas a propor, os recursos que utiliza e como o faz, ou seja, com o tipo de comunicação que utiliza para atingir cada objectivo a que se propõe.

A análise dos tipos de comunicação evidenciados na prática leva a um questionamento relativo aos objectivos e crenças. É portanto uma nova forma de observar que a determinação de objectivos não ocorre de forma neutra, sendo que determinadas maneiras de comunicar na aula supõem obstáculos à persecução de certos objectivos. Uma reflexão centrada nestas dimensões será também bastante útil na formação inicial (obviamente que na formação contínua o é), sobretudo durante o período de “prática pedagógica” (mas não só), por ser um período de imersão no processo de ensino e onde a cultura das escolas desempenha um papel crucial na conformação de crenças e hábitos dos professores.

REFERÊNCIAS

Belchior, F. H. (2003). Pedagogia, comunicação e existência. *Revista Portuguesa de Pedagogia, 37*(3), 197-230.

Brendefur, J., e Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 125-153.

Carrillo, J., Climent, N., Gorgorió, N., Rojas, F., e Prat, M. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(1), 67-76.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso.* Unpublished Tesis doctoral. Michigan: Proquest Michigan Univ. www.proquest.co.uk).

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 243-270.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: the context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 23*(2), 167-180.

Ferin, I. (2002). *Comunicação e culturas do quotidiano*. Lisboa: Quimera.

Lampert, M., e Blunk, M. L. (1998). *Talking mathimatics in scool: Studies of teaching and learning*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Potari, D., e Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 5,* 351-380.

Ribeiro, C. M. (2009). Possíveis contributos da elaboração de um modelo da prática lectiva para a formação de professores. In actas do *X Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação*, Bragança.

Ribeiro, C. M. (em preparação). A prática de uma professora e seus objectivos: percursos e (in)alterações.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J. e Monteiro, R. (2009). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica? Análisis y influencia en la práctica de una maestra. In M. J. González e J. Murrillo (Eds), *Investigación en Educacion Matemática XIII* (pp.415-423). Santander: SEIEM.

Ribeiro, C. M., Monteiro, R., e Carrillo, J. (2009). *Professional knowledge in an improvisation episode: the importance of a cognitive model.* Paper presented at the CERME6, Lyon, France.

Saxe, G. (1991). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1998a). On modeling teaching. *Issues in Education, 4*(1), 149-162.

Schoenfeld, A. H. (1998b). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education, 4*(1), 1-94.

Sherin, M. G., e Hans, S. Y. (2004). Teacher learning in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 20,* 163-183.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., e Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a Casebook for Professional Development*. New York: Teachers College Press.

Stuart, C., e Thurlow, D. (2000). Making in their own: Preservice teachers' experiences, beliefs, and classroom practices. *Journal of Teacher Education, 51*(2), 113-121.

Thompson, A. (1992). Teachers Beliefs and conceptions: A synthesis of the research *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). Nova York: Macmillan.

Wilkins, J. L. M. (2008). The relationship among elementary teachers' content knowledge, attitudes, beliefs, and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 139-164.

Concepções sobre a comunicação matemática de uma futura professora

Luís Menezes
CIeDETS, Escola Superior de Educação de Viseu

RESUMO

Este texto apresenta um estudo de caso, de natureza interpretativa, focado nas concepções de comunicação matemática de uma futura professora, que está a iniciar um curso de Educação Básica (1.º ciclo de estudos, que dá acesso aos segundos ciclos de formação de professores – 1.º e 2.º ciclos do ensino básico – e educação de infância). O estudo foi orientado por dois objectivos: (i) conhecer as concepções de uma futura professora sobre a comunicação matemática e o papel que esta desempenha na aprendizagem e no ensino da disciplina; (ii) compreender como evoluem essas concepções sobre a comunicação matemática e qual o papel da formação inicial nesse processo de desenvolvimento. Os dados recolhidos, através de inquérito por entrevista, mostram que a jovem futura professora defende um modo de comunicação reflexiva na aprendizagem da disciplina, que, embora consonante com o seu estilo pessoal, contrasta com a sua experiência de aluna no ensino secundário. A experiência no ensino superior, embora ainda no princípio, revela já a sua influência na forma como concebe o papel da linguagem matemática na comunicação e no valor da discussão na aprendizagem.

A comunicação na aula de Matemática é um tema que tem ganho nas últimas duas décadas apreciável importância, primeiro na agenda da investigação em educação matemática, tanto em Portugal como no estrangeiro, e depois nas preocupações das autoridades educativas e nos documentos curriculares.

No caso português, e acompanhando o movimento internacional, o interesse da investigação em educação matemática pela comunicação ganhou particular relevo em meados da década de 90, do século XX, com trabalhos de Menezes (1995), Veia (1996) e Almiro (1998), todos eles focados no papel do professor no processo comunicativo. Na década seguinte, esse trabalho da investigação portuguesa intensificou-se e alargou-se a outras dimensões da comunicação que tem por palco a aula de Matemática, focando também o aluno (Costa, 2007; Fonseca, 2006; Martinho, 2007; Menezes, 2004; Menezes e Ponte, 2006; Menezes e Ponte, 2009; Ponte et al., 2007a; Tomás-Ferreira, 2005).

Os documentos curriculares portugueses de Matemática, em consonância com o avanço da investigação, têm vindo a incorporar de modo crescente a comunicação matemática. Os programas do ensino básico dos 2.º e 3.º ciclos, do início da década de 90, colocam a comunicação ao nível das capacidades/atitudes, quando formulam os objectivos gerais, embora depois não lhe concedam o relevo correspondente. Cerca de uma década depois (2001), o Currículo Nacional destaca a comunicação (e acrescenta-lhe o adjectivo *matemática*), colocando-a, a par da prática compreensiva de procedimentos e da exploração de conexões, com um aspecto transversal da aprendizagem da Matemática. O novo programa de Matemática do ensino básico (Ponte et al., 2007b) dá ainda mais saliência e importância à comunicação matemática, atribuindo-lhe um duplo papel. Na linha do Currículo Nacional, embora com mais força, a comunicação matemática é elevada a objectivo curricular, sendo uma das três capacidades transversais (a par da resolução de problemas e do raciocínio matemático), em articulação com os temas matemáticos. O outro papel reservado à comunicação é de natureza metodológica, ou seja, a comunicação matemática assume-se como instrumento de ensino do professor e também de aprendizagem dos alunos.

O professor, peça fulcral do sistema educativo, colocado perante a mudança curricular tem necessidade de reconfigurar a sua prática e desenvolver o seu conhecimento profissional. Este conhecimento é de natureza muito diversificada, incluindo saberes relativos ao que vai ser ensinado (neste caso, a Matemática), saberes relativos aos alunos e à forma como aprendem, saberes relativos ao currículo e saberes relativos à acção de ensinar (a instrução). Todos estes saberes, mais ou menos organizados, correspondem às teorias do professor que organizam as suas acções – as suas concepções.

As concepções sobre a comunicação são de natureza transversal, estando presentes na própria Matemática (tanto mais que esta actividade humana, mais do que a maior parte das outras, utiliza em conjugação com a língua materna uma linguagem própria), na forma de conceber o ensino (por exemplo, no papel do professor e na natureza das tarefas), no modo de organizar a aprendizagem (por exemplo, na valorização ou não da discussão, na negociação de significados e na aquisição de conceitos matemáticos).

Que concepções revelam os professores e futuros professores sobre a comunicação matemática que ocorre em sala de aula? Como se desenvolvem estas concepções de comunicação e que papel tem a formação inicial neste processo? Estas questões têm sido pouco abordadas pela investigação portuguesa, tendo Ponte et al. (2007a) sublinhado que existe uma assimetria clara entre o que se sabe do papel dos programas de formação contínua na construção das concepções dos professores sobre a comunicação matemática, mas muito pouco sobre o impacto da formação inicial nessas concepções. Tendo em conta estas preocupações, realizou-se um estudo de caso de uma aluna que está a frequentar um curso de Educação Básica (1.º ciclo de estudos), o qual lhe dará acesso à profissão de professora de Matemática (2.º ciclo do ensino básico), tendo como objectivo: (i) conhecer as suas concepções sobre a comunicação matemática e o papel que esta desempenha na aprendizagem e no ensino da disciplina; (ii) compreender como evoluem essas concepções sobre a comunicação matemática e qual o papel da formação inicial nesse processo de desenvolvimento.

CONCEPÇÕES DE PROFESSORES SOBRE A COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

A comunicação tem vindo a ser cada vez mais valorizada enquanto processo pelo qual os alunos aprendem Matemática e não unicamente como objectivo curricular. Esse facto tem consequências no modo como os professores pensam e agem na aula de Matemática. A forma como os professores organizam as suas aulas de Matemática revela, em grande medida, as suas concepções. Dada a transversalidade da comunicação no ensino e aprendizagem, as concepções dos professores têm uma forte componente de aspectos relacionados com essa comunicação. Diversos autores têm-se debruçado sobre a forma como a comunicação matemática se desenrola na sala de aula, nomeadamente sobre os papéis desempenhados por professor e alunos, a natureza do discurso produzido e a forma como isso se traduz em aprendizagem (Brendefur e Frykholm, 2000; Wood, 1998). Destes trabalhos, destaca-se a contribuição de Brendefur e Frykholm (2000) que desenvolvem constructos de análise da comunicação matemática de sala de aula, os *modos de comunicação*, que representam concepções organizadoras do ambiente de sala de aula. Estes autores apontam quatro concepções de comunicação matemática: (i) modo de *comunicação unidireccional*; (ii) modo de *comunicação contributiva*; (iii) modo de *comunicação reflexiva*; e (iv) modo de *comunicação instrutiva*.

A comunicação *unidireccional* caracteriza-se por o professor dominar o discurso da aula, expondo os conceitos e explicando e modelando a resolução dos exercícios típicos. O papel fundamental dos alunos é ouvir o professor, para depois reproduzir oralmente e por escrito, sendo a eficácia deste ensino medida pela aproximação entre o que o professor expõe e aquilo que o aluno é capaz de reproduzir. Esta concepção de comunicação como transmissão (Carvalho, 1983) segue uma orientação positivista, concebendo o conhecimento como um corpo de “verdades objectivas” que são passíveis de ser transferidas para o aluno, de forma declarativa, recorrendo para isso à linguagem verbal.

A *comunicação contributiva*, como o próprio nome sugere, valoriza a interacção entre alunos e professor. No entanto, o maior protagonismo dos alunos nas aulas não tem uma expressão significativa na qualidade da interacção mantida. O professor permite que os alunos participem no discurso da aula, mas essa participação concretiza-se através de intervenções curtas e de um nível cognitivo baixo – algumas vezes, essas intervenções são de uma só palavra, como *sim* e *não* –, assumindo o professor o papel de validar as respostas.

A terceira concepção de comunicação matemática – *comunicação reflexiva* – funda-se no conceito de *discurso reflexivo* (Cobb *et al.*, 1997), sendo caracterizada por valorizar a reflexão dos alunos sobre a acção desenvolvida, incluindo-se nela a actividade dos alunos que decorre da realização de tarefas, em particular a actividade discursiva. Aquilo que professor e alunos fazem na aula (incluindo-se nesta acção o que dizem), torna-se num objecto de discussão. Nesta concepção de comunicação, o centro da autoridade sobre o saber deixa de estar centrado no professor e transfere-se para o espaço argumentativo – uma afirmação passa a ser aceite pelo grupo professor/alunos pela força da justificação apresentada. A comunicação surge assim associada ao sentido etimológico do termo – *comunicar* está ligado ao adjectivo *comum* e ao substantivo *comunidade* – significando partilha de saberes entre pessoas (Carvalho, 1983).

A *comunicação instrutiva* torna-se mais do que a simples interacção entre professor e alunos, influenciando também o próprio acto de instrução, integrando as ideias dos próprios alunos. Para Brendefur e Frykholm (2000), a comunicação instrutiva "é aquela em que o curso da experiência da sala de aula é alterado como resultado da conversação" (p. 148), ou seja, esta forma de comunicação envolve o que o professor faz para organizar o processo de ensino, tendo assim uma natureza metacognitiva.

O estudo realizado por Brendefur e Frykholm (2000) revela um significativo contraste entre os dois casos, futuros professores (Becky e Brad), ambos já com experiência de leccionação em sala de aula durante o curso de formação inicial. Becky reconhece a necessidade de promover entre os alunos a partilha de ideias; já Brad, está convencido de que o ensino directo, em que o professor é o protagonista (comunicação uni-direccional), constitui a melhor forma de os alunos aprenderem Matemática. Brendefur e Frykholm (2000) afirmam que estas concepções comunicativas contrastantes, não podendo ser atribuídas ao curso de formação inicial, devem-se essencialmente às suas experiências enquanto alunos do ensino secundário, fortemente marcadas pelo ensino tradicional unidireccional. Para além disso, Brendefur e Frykholm (2000) acrescentam que Becky tinha, ao contrário de Brad, uma certa predisposição para a reflexão. A forma como cada um deles concebe o conhecimento matemático é igualmente diferente. Enquanto Brad o via como um corpo constituído por definições e procedimentos, Becky encarava o conhecimento matemático como algo em construção, através da discussão e da comunicação reflexiva, tal como procura fazer nas suas aulas.

O trabalho de Menezes (2004), situado no contexto de um projecto de natureza colaborativa, com três professores do 1.º ciclo do ensino básico, revela progressos assinaláveis nas suas concepções sobre a comunicação matemática, passando todos eles a valorizar mais a comunicação reflexiva, na qual os alunos assumem um papel de maior destaque no discurso que se gera na sala de aula: "Quanto aos modos de comunicação subjacentes às aulas dos professores, a comunicação *reflexiva* passa a ser a predominante, quando antes, e principalmente nos professores mais jovens, imperava a *unidireccional* e a *contributiva*." (p. 575).

Martinho e Ponte (2005) relatam um estudo, da mesma natureza do de Menezes (2004), com uma professora do 3.º ciclo em que, apesar das dificuldades manifestadas, o trabalho desenvolvido no contexto da formação teve sério impacto nas suas concepções sobre a comunicação matemática, nomeadamente na sua tomada de consciência da importância da comunicação na sala de aula para a aprendizagem e também da necessidade de enriquecer os padrões de comunicação praticados.

O estudo realizado por Ponte et al. (2007a), com jovens professores que leccionam Matemática ao ensino básico, revela que as suas ideias sobre a comunicação matemática têm pouca influência daquilo que são os resultados da investigação nesta área. Os autores assinalam, que, contudo, é patente que "em alguns dos jovens professores a presença de ideias importantes, como o valor das questões abertas, a importância de não responder directamente aos alunos mas levá-los a reflectir sobre as suas próprias questões, a necessidade de explicar os raciocínios e explicar as ideias" (p. 69). Estes autores concluem que esta diversidade relativa sobre as ideias que os jovens professores têm da comunicação matemática deixa pensar que a formação inicial de professores tem conseguido chamar a atenção, embora de forma muito variável, para estas questões junto dos seus formandos.

A COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA NOS DOCUMENTOS CURRICULARES

A crescente atenção concedida à comunicação na aula de Matemática tem-se reflectido nos currículos escolares, tanto em Portugal como em outros países. No caso dos documentos curriculares portugueses do ensino básico das últimas duas décadas, a comunicação tem uma presença que evoluiu ao longo do tempo, tanto quantitativamente (número de referências nos documentos) como qualitativamente (natureza do papel que lhe é reservado).

Os programas de Matemática do ensino básico, do início da década de 90 do século XX, incorporam já a comunicação, embora de forma muito abrangente, ao nível das finalidades e dos objectivos gerais. O programa do 1.º ciclo, publicado em 1991, embora refira que "as grandes finalidades do ensino da Matemática para o conjunto dos três ciclos do Ensino Básico [são]: (i) desenvolver a capacidade de raciocínio; (ii) desenvolver a capacidade de comunicação; (iii) desenvolver a capacidade de resolver problemas," (DEB, 2004, p, 163), depois não lhe dá expressão no resto do documento. Pelo contrário, enfatiza mesmo a linguagem matemática em detrimento da comunicação: "É necessário que, desde muito cedo, as crianças se apercebam de que a Matemática é também uma linguagem que traduz ideias sobre o mundo que as rodeia. Uma das dificuldades mais sentidas por crianças destas idades é a tradução do real e da linguagem comum para a linguagem simbólica da matemática." (DEB, 2004, p. 170)

Os programas de Matemática do ensino básico dos 2.º e 3.º ciclos, da mesma altura, apresentam a comunicação como uma das quatro capacidades/atitudes, nos objectivos gerais, envolvendo: (i) Desenvolver a capacidade de comunicação; (ii) Compreender enunciados orais e escritos, distinguindo o essencial; (iii) Exprimir oralmente ou por escrito enunciados de problemas, processos, conclusões; (iv) Utilizar a nomenclatura adequada (símbolos, designações...); (v) Interpretar e utilizar representações matemáticas; (vi) Transcrever mensagens matemáticas da língua materna para a linguagem simbólica e vice-versa (Ministério da Educação, 1991, p. 7). Apesar desta maior visibilidade inicial, no restante documento não existe o correspondente relevo, pelo que a recomendação se perde bastante.

No Currículo Nacional (2001), a comunicação ganha maior importância e nível de detalhe:

> A comunicação inclui a leitura, a interpretação e a escrita de pequenos textos de matemática, sobre a matemática ou em que haja informação matemática. Na comunicação oral são importantes as experiências de argumentação e de discussão em grande e pequeno grupo, assim como a compreensão de pequenas exposições do professor. O rigor da linguagem, assim como o formalismo, devem corresponder a uma necessidade e não a uma imposição arbitrária. (DEB, 2001, p. 14)

O novo programa de Matemática do ensino básico (Ponte et al., 2007b) concede à comunicação matemática um papel de grande importância, tanto no ensino como na aprendizagem da Matemática. Este processo matemático ganha força, sendo colocado, juntamente com a resolução de problemas e o raciocínio matemático, como competência transversal aos quatro temas matemáticos. Nessa medida, e de modo diferente dos documentos curriculares anteriores, a comunicação, enquanto objectivo curricular, ganha conteúdo ao longo dos três ciclos do ensino básico:

> A comunicação matemática é uma outra capacidade transversal a todo o trabalho na disciplina de Matemática a que este programa dá realce. A comunicação envolve as vertentes oral e escrita, incluindo o domínio progressivo da linguagem simbólica própria da Matemática. (...) O desenvolvimento da capacidade de comunicação por parte do aluno, é assim considerado um objectivo curricular importante e a criação de oportunidades de comunicação adequadas é assumida como uma vertente essencial no trabalho que se realiza na sala de aula. (p. 10)

Para além deste papel, o programa de Matemática do ensino básico destaca igualmente a comunicação na sua vertente metodológica: “Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e promover o raciocínio e a comunicação matemáticos, para além de constituírem objectivos de aprendizagem centrais neste programa, constituem também importantes orientações metodológicas para estruturar as actividades a realizar em aula.” (p. 11). Assim, a comunicação cumpre um importante papel nas actividades de ensino do professor e também nas de aprendizagem dos alunos.

METODOLOGIA

Este estudo segue uma orientação interpretativa, tendo-se optado por realizar um estudo de caso de uma aluna, futura professora, de um curso de Educação

Básica de uma escola superior de educação. A aluna, a quem foi atribuído o pseudónimo de Carolina, estava a frequentar o 1.º ano, a iniciar o 2.º semestre do curso, tendo frequentado até aí uma disciplina da área de Matemática (Matemática para a Educação Básica).

A recolha de dados foi realizada através de entrevista semi-estruturada que decorreu na escola que frequenta. A entrevista, para além das questões sobre a comunicação matemática, contemplou a apresentação de dois episódios de sala de aula de Matemática (em anexo) que a futura professora foi chamada a comentar no plano comunicativo. A introdução destes episódios na entrevista visou fornecer elementos para a reflexão da futura professora (uma vez que esta ainda não tinha tido, até aí, qualquer contacto com a sala de aula de Matemática no contexto do seu curso de formação inicial).

A entrevista foi áudiogravada e posteriormente transcrita. Após esta transcrição, e tal como tinha sido combinado com a participante, o texto obtido foi devolvido para ser corrigido caso ela considerasse necessário. Para além disso, juntamente com o texto transcrito, foram enviadas à aluna algumas questões adicionais que visaram esclarecer alguns aspectos do seu discurso. A aluna não fez alterações à entrevista, respondendo unicamente às questões colocadas. No final do texto reenviado ao investigador, a aluna comentou positivamente a oportunidade de reflexão sobre a comunicação matemática que a entrevista lhe tinha proporcionado.

A análise de dados assentou na análise de conteúdo das respostas dadas pela participante, procurando-se identificar regularidades e, em seguida, categorizar a informação. Assim, para atingir os objectivos da investigação, foram considerados três temas de análise: (i) visão da comunicação; (ii) perspectivas sobre a comunicação na sala de aula; e (iii) experiências de comunicação e evolução das concepções. Para cada um, foram definidas categorias formais que emergem da literatura e dos dados empíricos.

CAROLINA

Carolina, com 19 anos, chegou ao ensino superior vinda do ramo de “Ciências e Tecnologia”, tendo tido a disciplina de Matemática até ao 12.º ano. Está a frequentar o curso de Educação Básica, tendo concluído o primeiro semestre. Até ao momento, teve uma disciplina da área de Matemática, designada *Matemática para a Educação Básica*, na qual os alunos são desafiados a reflectir sobre as suas experiências matemáticas enquanto alunos (nos ensinos básico e secundário) e os introduz, a partir da leitura e discussão de textos e também da resolução de tarefas matemáticas, às origens do pensamento matemático, natureza da disciplina, processos usados na construção do conhecimento matemático, evolução história dos diversos ramos da Matemática e a Matemática nos currículos escolares.

Carolina é uma pessoa bem-disposta e revela uma certa descontracção no contacto inicial. Em nenhuma disciplina das que frequentou no 1.º semestre do curso trabalhou o tema da *comunicação matemática*. A entrevista revela que não tinha muita reflexão sobre o tema, tendo realizado alguma durante o seu decorrer. Expressões da entrevista como, por exemplo, “vão-me surgindo assim as coisas à medida que falo”, indiciam a reflexão que vai realizando durante a conversa.

Visão da comunicação

Carolina começa por reflectir sobre a comunicação em geral, concebendo-a como algo próprio do ser humano, constituindo-se como um meio que permite, por um lado, estabelecer ligação e, por outro, cambiar informação:

> Acho que é da natureza do ser humano, à partida, comunicar com outros. A comunicação é uma ligação que se estabelece entre algo ou entre duas pessoas para transmitir informação. Por exemplo, a linguagem é um tipo de comunicação. Existem diversas formas de comunicar.

Quando procura pensar sobre o papel da comunicação na actividade humana, Carolina mostra que nunca tinha reflectido muito sobre este tema. A reflexão que inicia leva-a a identificar a comunicação como uma forma de as pessoas se relacionarem e, sobretudo, como uma forma de transmitir conhecimento:

> A comunicação é importante para transmitir conhecimento entre gerações, para [pausa] no fundo, é uma fora de expressar, é uma forma de convivência. [pausa]. Não sabia que isto era tão difícil. [risos] É que eu nunca reflecti sobre isto. O primeiro papel que me lembrei para a comunicação é a transmissão de conhecimento, mas poderá haver outros.

Deslocando a sua atenção para a comunicação na Matemática enquanto área de saber, reafirma o seu papel na transmissão de conhecimento: “Permite partilhar dados entre os investigadores, os matemáticos, pois é através da partilha que surgem novas ideias. Permite também a transmissão de conhecimentos a outras gerações.”. Neste âmbito, referencia a especificidade que a linguagem da Matemática confere a esta comunicação, facto que, no seu entender, pode ser fonte de problemas:

> A comunicação matemática é uma comunicação específica, não é? Visa a transmissão de conceitos específicos, pode ser difícil estabelecer essa comunicação quando não existem as tais bases. Por isso, não é fácil estabelecer essa comunicação. Há a comunicação geral, mas depois há comunicações específicas entre determinados grupos consoante as circunstâncias. É uma comunicação (...) que tem os seus próprios processos, os seus próprios símbolos.

Para Carolina, os símbolos são usados pelos matemáticos com dois objectivos. O primeiro é universalizar a linguagem e, dessa forma, facilitar a comunicação entre os matemáticos, diminuindo a ambiguidade. O segundo objectivo liga-se com a possibilidade de os símbolos economizarem o discurso:

> Havendo várias linguagens, isso provoca sempre ambiguidades, esses tais problemas de comunicação. [risos] Vão-me surgindo assim as coisas à medida que falo. (...) O facto de existir uma linguagem própria permite expandir e universalizar. Tipo, ser igual em todos os sítios. E talvez seja isso. Um matemático que queira comunicar com outro, de outro país, os símbolos ajudam a comunicação. Sem os símbolos seria difícil comunicar. Os símbolos também são uma forma mais fácil de expor as ideias. Há coisas que se escritas em linguagem corrente ocupariam imenso espaço. Demonstrações [pausa] é também uma forma facilitadora de expor ideias.

Perspectivas sobre a comunicação na aula

Em termos de Matemática escolar, Carolina revela uma concepção da comunicação mais abrangente. Continuando a evidenciar que a sua reflexão sobre o tema não é muito extensa, reconhece que para além da transmissão de conhecimento, a comunicação que decorre na aula de Matemática serve outros objectivos, como o conhecimento do outro:

> Na sala de aula, tem que haver outras preocupações para além da transmissão de conhecimento. A comunicação, acho eu, ajuda nessas outras funções. O professor também deve [pausa] deixe lá ver se consigo explicar [pausa] (...) o professor não se deve preocupar em só transmitir conhecimento sem se preocupar também em conhecer os alunos, considerar a individualidade dos alunos e talvez aí a comunicação também tenha um papel importante pois é através da comunicação que eu consigo perceber o mundo do aluno.

Carolina amplia a forma como concebe a comunicação na aula de Matemática e o papel que o professor desempenha neste processo, salientando duas possibilidades: o monólogo, associado à exposição pelo professor, e o diálogo, associado à interacção entre o professor e os alunos: "O professor quando comunica pode estabelecer um monólogo ou um diálogo com os alunos. Pode haver um momento que é só de exposição e outro em que pode haver interacção com os alunos: de exprimir opiniões, de debate [pausa] por exemplo, o debate é uma forma interessante de expor o conhecimento."

Colocando na balança os dois modos de o professor actuar na aula de Matemática, Carolina evidencia a importância que representou para si, enquanto aluna do ensino secundário, a possibilidade de interagir com os outros e confrontar ideias através da discussão:

> A exposição é importante mas o debate consegue atingir os objectivos pretendidos. Por exemplo, quando existe... [pausa] as matérias mais presentes são aquelas em que confrontei as minhas opiniões, as minhas vivências. Enquanto que outras que apenas ouvi, não confrontei, não critiquei provavelmente a maioria esqueci. E, portanto, o debate permite

> isso, exprimir o que sei e confrontar. Lá está, permite a comunicação entre as pessoas. Lá está, é uma forma em que se atingem melhor os objectivos.

Carolina reforça esta ideia, colocando a comunicação num lugar central na sua teoria da aprendizagem da Matemática, que passa por um posicionamento activo do aprendente face à informação que é emitida por alguém. Ficar por aí, sem confrontar com os outros e, sobretudo, com o seu próprio conhecimento, é para Carolina deixar o processo inacabado:

> Se uma pessoa recebe uma informação e aceita simplesmente, vai ter dificuldade em compreender porque a compreensão só vem da confrontação com o que sabemos, com o que vivemos e depois temos que ter liberdade de dizer "eu concordo" ou "não concordo", consoante o que sei. O professor até me pode abrir novas perspectivas e chegar à conclusão que a perspectiva que eu tinha não se adapta tanto à realidade. Sei naquele momento, não confronto e não compreendo. É só aceitação. Por isso é que eu digo que numa aula expositiva se corre esse risco.

Apesar de em alguns momentos parecer usar os termos "exercício" e "problema" de forma indiferenciada, Carolina associa os problemas a tarefas que suscitam uma comunicação de natureza mais rica e, pelo contrário, os exercícios a situações bastante dirigidas – podendo visar a aferição de aprendizagens realizadas – e com menos possibilidade de debate:

> Na Matemática, o problema deve ser o ponto de partida e só depois se devem fazer exercícios para ver se se aprendeu através do problema. Claro que um problema suscita mais comunicação porque há sempre opiniões divergentes. Eu quando penso num problema penso logo numa questão, algo a que ainda não se chegou a uma conclusão. Um exercício penso numa indicação, tipo "faz isto" , "resolve aquilo", isso não proporciona a discussão assim tanto.

Instada a comentar os dois episódios de sala de aula (em anexo), Carolina revela coerência nas suas concepções, valorizando a importância de os alunos confrontarem opiniões, discutirem e reflectirem como meio de aprender Matemática:

> Identifico-me mais com o episódio B porque considero que é um método mais eficaz e interessante de dar aulas e de conseguir os objectivos que se pretende atingir numa sala de aula. O segundo diálogo [B] baseia-se em interrogações e tem como ponto de partida um problema. Isto permite que haja, por parte do aluno, uma confrontação com o conhecimento que já possui previamente, existe reflexão, crítica, ponderação do melhor caminho a tomar e desenvolvimento de capacidades necessárias ao trabalho em grupo.

Pelo contrário, no episódio A, Carolina aponta duas dificuldades no campo comunicativo. A primeira é o perigo de o professor não conseguir monitorizar a aprendizagem por falta de informação dos alunos. A segunda prende-se com a opção do professor por um discurso "afirmativo" e não por um discurso "reflexivo" (as poucas perguntas que Carolina identifica no episódio visam a simples confirmação):

> No primeiro episódio acontece praticamente o contrário, sendo que a desvantagem que considero mais "grave" é o facto de o professor correr um grande risco de não se aperceber das dúvidas e das dificuldades dos alunos, pois não existe um incentivo à participação dos alunos, sendo que esta só acontece por iniciativa própria, e deste modo não existe uma transmissão de dúvidas ou dificuldades encontradas. É um diálogo que se apoia somente em afirmações, não constando interrogações, a não ser "Certo?", "Ok?", interrogações que visam apenas confirmar as afirmações anteriores.

Carolina reforça esta ideia, comparando os dois episódios: "A comunicação tem um papel mais activo e é mais fomentada no episódio B. No episódio A, a comunicação tem maioritariamente um sentido: professor-aluno. É uma comunicação fechada". Continua, referindo que: "Já no episódio B, a comunicação ocorre nos dois sentidos, portanto, professor-aluno e aluno-professor. Existe espaço para a discussão de ideias, para a transmissão livre de opiniões de cada pessoa".

Como seria de esperar, Carolina nunca teve contacto directo com os documentos curriculares de Matemática. Por isso, tem a visão do currículo ensinado pelos seus professores. A partir dessa reflexão, considera que o desenvolvimento da capacidade de comunicação é algo importante na formação dos jovens:

> Acho que isso é importante porque não se pretende que saiam pessoas com muito conhecimento e saiam de uma sala de aula e não saibam comunicar com os outros. Não saber lidar com os sentimentos, porque a comunicação também permite lidar com isso [pausa] sentimento, pensamentos. Acho que a escola não deve só formar pessoas com um largo campo de conhecimento, mas também com as capacidades fundamentais, principais, que é preciso ter fora da sala de aula, como ser humano.

Contudo, assinala que os professores não parecem valorizar muito o desenvolvimento dessa capacidade:

> Acho que a comunicação é algo que nós devemos aprender na escola, mas dá-me a ideia de que não é algo que os professores valorizem muito. Na minha opinião, os professores têm muito a preocupação de transmitir o conhecimento, que tem que corresponder com o programa, e têm que dar tudo em pouco tempo. Talvez pela falta de tempo, parece não haver preocupação com o desenvolvimento dessas outras vertentes.

Experiências de comunicação e evolução das concepções

A sua experiência de aluna do ensino secundário mostrou-lhe um modelo de comunicação que seguia sobretudo o modelo expositivo de transmissão de informação, iniciado pela explicação do professor, que era acompanhada pelos alunos, seguida da resolução de exercícios de aplicação: “A minha experiência enquanto aluna não fugiu muito a estas aulas expositivas. Se calhar agora, neste últimos anos, tenha mudado um bocadinho, mas a maioria foi o professor expor a teoria no quadro, nós a ouvirmos e depois a tentarmos aplicar em exercícios.”.

Carolina faz referência a um outro modelo de ensinar e aprender, em que a comunicação tem um papel diferente – com uma natureza mais reflexiva –, embora não o tenha experimentado na disciplina de Matemática:

> No Secundário já senti outro modo de proceder que foi fazer os exercícios antes de ter a matéria e depois comparar mais tarde como os outros. Isso já é outra forma. Uma é receber a informação, primeiro, e depois tentar aplicá-la. A outra é resolver os exercícios, primeiro, e recorrer, lá está, aos conhecimentos que já tenho para tentar responder àquelas perguntas e só depois adquirir o conhecimento sobre essas mesmas perguntas. Já é outro método. Isto foi no liceu, só com um professor e não foi a Matemática. A Matemática foi sempre assim: exposição e aplicação de exercícios e trabalhos para casa.

Durante o seu curso de Educação Básica, ainda muito no início, Carolina assinala que o tema da comunicação não foi debatido explicitamente, especialmente nas disciplinas onde isso lhe pareceria ser mais óbvio, como as da área de Português: “No curso nós tivemos uma cadeira de Linguística. Vimos que havia um orador, uma mensagem e um ouvinte, mas nós focámos muito o orador. Essa palavra, a comunicação, não constou muito”.

A disciplina de “Matemática para a Educação Básica”, que Carolina frequentou no 1.º semestre do curso, tratou um conjunto de aspectos que, sem estarem focados na comunicação matemática – talvez por isso, a aluna não lhe faça qualquer referência quando questionada –, estão intimamente relacionados com ela. Concomitantemente, Carolina integra no seu discurso – e muito provavelmente com impacto nas suas concepções – um conjunto de ideias ligadas com a comunicação matemática, quando refere que: “Há a comunicação geral, mas depois há comunicações específicas entre determinados grupos consoante as circunstâncias. É uma comunicação (...) que tem os seus próprios processos, os seus próprios símbolos.”; “Um matemático que queira comunicar (...) os símbolos ajudam a comunicação. Sem os símbolos seria difícil comunicar.”.

A jovem revela ter consciência de que a sua concepção de comunicação está num processo de desenvolvimento, quando afirma: “Acho que ainda tenho um conceito muito limitado de comunicação (...) tenho a certeza disso. (risos) Mas eu espero ter oportunidade de mudar isso, ao longo deste curso.”.

CONCLUSÕES

A concepção de comunicação que a jovem evidencia emerge do seu estilo discursivo, ou seja, ainda que não o tivesse explicitado, esta concepção ter-se-ia revelado no seu género de conversação. Carolina evidencia uma concepção de comunicação reflexiva – tal como o propõem Brendefur e Frykholm (2000) e como surge nos professores estudados por Menezes (2004) e Martinho e Ponte (2005) – que na sua perspectiva não é contraditório com a ideia de transmissão, que algumas vezes associa a informação e outras a conhecimento. A jovem apresenta, pois, os dois sentidos de comunicação indicados por Carvalho (1983), sendo visível que a componente reflexiva está presente mesmo quando se refere à transmissão de conhecimento. Aliás, a aluna distingue o plano da comunicação na Matemática enquanto Ciência do plano da comunicação na Matemática escolar, acentuando a necessidade da componente reflexiva na segunda – que associa à discussão, utilizando o termo “debate” para a descrever.

Em termos de sala de aula, e de forma surpreendente, tendo em conta o seu percurso escolar, muito marcado por um estilo de ensino unidireccional ou, em alguns momentos, contributivo, e também para a sua idade, revela possuir uma perspectiva da aprendizagem bastante consistente (que não circunscreve à Matemática), onde a comunicação tem um papel fundamental, permitindo a expressão das ideias e, sobretudo, a sua confrontação. Apesar da sua experiência como aluna ter passado por um modelo em que o professor expõe a matéria e depois os alunos resolvem exercícios (portanto, da teoria para a prática), defende que o modelo de ensino-aprendizagem pode ser invertido, começando nos problemas para fazer surgir o conhecimento matemático (acredita que, dessa forma, se prefigura um clima mais favorável à discussão).

Carolina mostra também ser sensível aos diversos tipos de perguntas do professor, sendo isso particularmente marcante na análise que faz dos dois episódios de sala de aula. No plano da comunicação matemática, a jovem futura professora revela ter consciência das potencialidades e das dificuldades da linguagem da Matemática. No seu entender, num caso, facilita a comunicação porque se adopta uma escrita mais universalizante e económica, mas, noutro, pode colocar dificuldades de descodificação dos símbolos.

A influência do seu percurso escolar no desenvolvimento da sua concepção de comunicação matemática pode ser dividida em duas partes. A primeira, antes da entrada no ensino superior, leva Carolina, por contraposição, a defender um tipo de experiência de aprendizagem em que o debate é uma ideia forte. A segunda parte, já no ensino superior, apesar de ainda bastante curta, revela já alguma influência do curso, quando se foca no papel da linguagem matemática na comunicação, especialmente na ciência matemática, e em processos matemáticos como a simbolização e a demonstração. Quanto à valorização da comunicação reflexiva, o estilo adoptado nesta disciplina – muito assente no debate de ideias – pode ter dado algum contributo. Tendo em conta o percurso ainda curto da aluna no ensino superior, estes resultados são animadores, considerando as preocupações de Ponte et al. (2007a) relativamente ao impacto da formação nas concepções dos jovens futuros professores. O confronto das suas concepções sobre a comunicação matemática com a prática, que acontecerá mais à frente no curso, é algo que deverá ser acompanhado em estudos subsequentes.

REFERÊNCIAS

Almiro, J. (1998). *O discurso na aula de matemática e o desenvolvimento profissional* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Brendefur, J. e Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two perspectives teachers'conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 3, 125-153.

Carvalho, H. (1983). *Teoria da linguagem: Natureza do fenómeno linguístico e a análise das línguas* (Vol. I). Coimbra: Coimbra Editora.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. e Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 258-277.

Costa, A. (2007). *A importância da língua portuguesa na aprendizagem da Matemática* (Tese de mestrado, Universidade do Minho).

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

DEB (2004). *Organização curricular e programas – 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Fonseca, C. (2006). *As histórias e a Matemática no 1.º ciclo do Ensino Básico* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Martinho, M. H. (2007). *A comunicação na aula de Matemática: Um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Martinho, M. H., e Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. In J. Brocardo, F. Mendes, e A. M. Boavida (Eds.), *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 273-293). Setúbal: APM.

Menezes, L. e Ponte, J. P. (2006). Da reflexão à investigação: Percursos de desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo na área de Matemática. *Quadrante*, 15, 3-32.

Menezes, L. e Ponte, J. P. (2009). Investigação colaborativa de professores e ensino da Matemática: Caminhos para o desenvolvimento profissional. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 1 (1), 1-31.

Menezes, L. (1995). *Concepções e práticas de professores de Matemática; Contributos para o estudo da pergunta* (Colecção TESES - mestrado), Associação de Professores de Matemática: Lisboa.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores* (Colecção TESES - doutoramento). Lisboa: APM.

Ponte, J., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J., Veia, L.. e Viseu, F. (2007a). *A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática*. Revista Portuguesa de Educação, 20 (2), 39-74.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Guimarães, F., Breda, A., Sousa, H., Oliveira, P., Martins, G. (2007b). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Tomás-Ferreira, R. A. (2005). *Portuguese student teachers' evolving teaching modes: A modified teacher development experiment* (Tese de doutoramento, Illinois State University, USA).

Veia, L. (1996). *A Resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação no 1.º ciclo do Ensino Básico – três estudos de caso* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or focusing. In H. Steinbring, M. Bussi e A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167-178). Reston: NCTM.

ANEXO

Episódio A

Professor - Nós hoje vamos falar sobre perímetros de polígonos. Ora toda a gente sabe o que é um polígono, não sabe? Ora um polígono, é uma figura geométrica limitada por uma linha poligonal fechada. Por exemplo, um rectângulo é um polígono. [Pausa] Talvez seja melhor registarem isso no caderno, para não esquecerem. Escrever é importante para nós ficarmos a saber as coisas bem. Certo?

Ricardo – Escrevemos de que cor?

Professor – Tanto faz. Vamos lá, para não atrasarmos muito. Eu dito e vocês escrevem. [pausa] Não é preciso escrever no quadro.

Maria – Não.

Professor – Escrevam lá: "Um polígono é uma..."

(...)

Professor – Temos aí um polígono com 4 lados. Todos sabem como se chama.

José – Um quadrado.

Professor – Não me parece, olha que não tem os lados todos iguais. Podemos é dizer que é um quadrilátero. Atenção, que um quadrado não é o mesmo que quadrilátero. Qualquer polígono com quatro lados chama-se quadrilátero. Certo? Acho melhor também registarem no vosso caderno.

(...)

Professor – Ora aqui temos o nosso quadrilátero. Se nós quiséssemos colocar uma fita à volta dele, teríamos que saber o seu comprimento, ou seja, o comprimento da linha que está à volta. Esse comprimento chama-se perímetro. Ok?

Alunos – Sim.

Professor – Então, vamos lá calcular esse comprimento.

Episódio B

Professor – Na primeira parte da aula, vocês vão resolver em grupo um problema. Quero que façam um pequeno relatório que mostre como resolveram o problema. Depois, na segunda parte, vamos discutir as vossas resoluções e tirar conclusões.
Elisabete – É um relatório como o que fizemos na semana passada, em que colocámos os esquemas e as nossas explicações?
Professor – Sim. Para a resolução e relatório vão ter 30 minutos. Vou distribuir a tarefa. [distribuição do problema].
João – Podemos começar?
Professor – Sim, só antes vou ler para todos em voz alta: "O pai do Miguel tem um rolo de rede de 1,5m de altura e 40m de comprimento. Pretende construir uma vedação de um terreno onde vão ser colocadas galinhas. O terreno vedado vai ter a forma rectangular. Com a rede disponível, qual será a cerca que veda um terreno maior para as galinhas andarem mais à-vontade?". Vamos lá resolver. Têm 30 minutos.
[Grupo 1]
Joana – Então, vamos lá resolver isto. Vamos voltar a ler. Eu leio.
(...)
Marta – Se a rede tem 40m de comprimento, posso fazer um rectângulo 10, 10, 10, 10.
Joana – Mas isso não fica um rectângulo.
Marta – Não fica? Fica. Queres que eu desenhe aqui no papel?
Joana – Isso é um quadrado.
Roberto – A Joana tem razão. Aqui diz que é um rectângulo.
Marta – Mas eu acho que o quadrado é um rectângulo.
Roberto – Que confusão – Um quadrado que é um rectângulo. Mas é quadrado e rectângulo?
Marta – Ora, é as duas coisas.
(...)
No segundo momento da aula, na apresentação dos trabalhos de grupo:
Professor – Manel, apresentas o que o teu grupo fez?
Manuel – Nós fizemos muitos galinheiros. Eu vou ler o que escrevemos no nosso relatório: *Os galinheiros podem ser diferentes, uns mais esticados do que outros. Pode ser 15, 5, 15 e 5; 14, 6, 14, 6 ou 10, 10, 10, 10.*
João – Ena, há muitos mais.
Professor – Calma, um grupo de cada vez. Manuel.
Manuel – No primeiro caso a área é 75, no segundo é mais, 84, e no terceiro é 100 m^2. Este foi o que nos deu mais. A área é maior e as galinhas têm mais espaço.
João – Nós temos mais rectângulos, mas não temos nenhum a dar mais do que 100.
Professor – Será que haverá rectângulos cuja área seja maior do que 100?
Maria – Essa pergunta é difícil? Nós não temos nenhum rectângulo maior.
Professor – Ora, neste problema estamos a trabalhar com dois conceitos matemáticos. Um que está fixo e o outro que vai mudando. Quais são eles?
Silvio – O perímetro é sempre 40 e a área é que está a mudar.
Professor – Mas por que é que isso acontece?
(...)

Auto-regulação das aprendizagens matemáticas pelos alunos, a acção do professor

Paulo Dias
Escola Secundária da Moita, Projecto AREA
Leonor Santos
Instituto da Educação, Universidade de Lisboa, Projecto AREA

RESUMO

Nesta comunicação é relatada parte de uma investigação em curso para a obtenção do grau de doutor no Instituto da Educação da Universidade de Lisboa. Procura-se compreender práticas avaliativas de professores de Matemática, do ensino secundário, que contribuam para a promoção da auto-regulação do aluno, em Matemática. O projecto de investigação desenvolve-se num contexto de trabalho colaborativo, entre o primeiro autor e dois professores. Planifica-se e avalia-se a concretização de práticas lectivas promotoras da auto-regulação, nas tarefas matemáticas, pelos alunos. Neste texto relata-se a prática de um professor, o José, numa das tarefas realizadas com alunos do 11.º ano de Matemática, curso profissional, no 1.º período de 2009/2010. Em particular, estuda-se o feedback oral e escrito, enquanto processos privilegiados de comunicação entre professor e alunos. A recolha de dados ocorreu através da observação directa de aulas, áudio gravadas, e da recolha de documentos escritos produzidos para a realização da experiência, incluindo as produções dos alunos (1ª e 2ª versões). Os resultados obtidos evidenciam que, na sala de aula, o professor privilegia os aspectos da comunicação e promove a compreensão do enunciado da tarefa. Na forma escrita, o professor procura que os alunos aproximem as suas produções a um conjunto de níveis avaliativos, discutidos e adaptados, em trabalho colaborativo, entre professores, e discutidos com os alunos. Estas estratégias associadas à realização da tarefa em duas fases, e em pares, foram promotoras da auto-regulação das aprendizagens matemáticas pelos alunos.

Esta comunicação baseia-se num contexto de trabalho colaborativo, em que um grupo de três professores do ensino secundário planifica, implementa, e avalia práticas lectivas, com o propósito de promover a auto-regulação das aprendizagens matemáticas dos alunos. Um elemento deste grupo integra o projecto AREA[12]. É neste contexto que se procura compreender a prática avaliativa de um professor de Matemática, através do feedback dado no diálogo da sala de aula, e no feedback escrito fornecido às produções dos alunos. Para tal, procura-se responder às questões seguintes: Como se caracteriza o feedback oral fornecido enquanto os alunos desenvolvem uma tarefa matemática na sala de aula? Como se caracteriza o feedback escrito

[12] Projecto financiado pela FCT de 2008-10 (nº PTDC/CED/64970/2006), http://area.fc.ul.pt/pt/. No projecto AREA, investigadores e professores têm vindo a desenvolver, implementar e avaliar práticas avaliativas ao serviço da aprendizagem, quer na Educação Pré-Escolar e no 1.º ciclo, em geral, quer nos restantes ciclos do Ensino Básico e no Ensino Secundário, em Matemática.

fornecido à primeira versão da tarefa realizada? De que forma o feedback contribuiu para o desempenho dos alunos? De que forma a prática avaliativa do professor contribuiu para o desenvolvimento da capacidade de auto-regulação dos alunos?

O conhecimento da forma como os professores de Matemática promovem a auto-regulação da aprendizagem em Matemática pode contribuir para a melhoria dos processos de ensino e, consequentemente, do desempenho matemático dos alunos. Aceder a este conhecimento exige a análise de aspectos como a integração dos processos de ensino, de aprendizagem e de avaliação, e por isso, uma maior atenção sobre o feedback fornecido pelo professor, aos alunos, e a interacção na sala de aula de Matemática, formas essenciais da comunicação entre professor e alunos.

AVALIAR PARA APRENDER

Na prática lectiva de sala de aula, o professor implementa e monitoriza uma diversidade de tarefas e modos de fazer por si construídos, através de sucessivas avaliações. Esta avaliação, na maior parte das vezes, é apenas uma recolha não estruturada de alguns indicadores que fornecem evidência ao professor sobre o impacto que a planificação está a ter no alcance das aprendizagens esperadas. Como resultado, o professor equaciona rapidamente alternativas, e produz constantemente decisões. Esta é a assumpção de que a regulação das aprendizagens é um processo de avaliação formativa, na medida em que tem implicações directas no ajuste do processo de ensino e aprendizagem (Stiggins, 1995). A propósito, Black e Wiliam (1998), Gardner (2006) e Fernandes (2006) referem que a avaliação pedagógica, em que se destaca a preocupação com o funcionamento e a regulação dos processos de interacção pedagógica e de comunicação que se estabelecem na sala de aula, é determinante na melhoria dos resultados dos alunos.

O desenvolvimento da vertente reguladora da avaliação (Santos, 2004) assume-se como uma forma de orientar a consistência que deve existir entre a forma como se desenvolve o currículo, na sala de aula, e as estratégias, as técnicas e os instrumentos de avaliação utilizados. Mas, a avaliação realizada pelo professor não é suficiente. É o aluno que decide se vale ou não a pena o esforço para ter êxito, e essa decisão tem por base a sua percepção sobre as suas capacidades, para a qual pode contribuir a auto-avaliação (Stiggins, 2005). A avaliação desenvolvida no dia-a-dia da sala de aula exige a participação activa do aluno. No entanto, a perspectiva de avaliação centrada no aluno assume uma abrangência que ultrapassa a auto-avaliação (Perrenoud, 1999; Santos, 2002). A atribuição de uma maior visibilidade ao papel que o aluno tem na construção do próprio conhecimento passa por o professor dar uma atenção especial aos processos de comunicação, onde se inclui o feedback, a regulação, a auto-avaliação e a auto-regulação das aprendizagens. São formas de avaliação. Todas elas ocorrem numa acção interactiva, em comunicação, no decorrer do processo de ensino e aprendizagem.

Com a aprendizagem mais centrada no aluno (Santos, 2003; Soares, 2007), o professor deixa de ter o domínio que lhe foi conferido tradicionalmente em educação na área da avaliação, para permitir ao aluno assumir um papel mais interventivo. A avaliação, neste caso, deixa de ser um juízo sobre a aprendizagem do aluno, para ser um momento capaz de revelar o que o aluno já sabe, os caminhos que percorreu para alcançar o conhecimento demonstrado, o que sabe e o que pode vir a saber.

O professor pode ter um papel de destaque ao incrementar contextos que facilitem o desenvolvimento da auto-regulação (Santos, 2002). Para além do incentivo à auto-avaliação, existem outras práticas que podem contribuir para a concretização destas intenções: a abordagem positiva do erro (Hadji, 1994); o questionamento (Santos, 2002; Roullier, 2004); a explicitação/negociação de critérios de avaliação (Alves, 2004; Bobb-Wolff, 2002); o recurso a instrumentos alternativos de avaliação (Menino e Santos, 2004); o feedback e a escrita avaliativa (Wiliam, 1999; Santos e Dias, 2007); o reflectir antes de agir (Dias e Santos, 2008a; 2008b); o feedback em questões-aula (diálogo na sala de aula); o feedback simbólico; o feedback da avaliação dos pares; e o feedback proveniente dos testes sumativos (KMOFAP[13]) (Black *et al*., 2003).

Os professores através de determinados contextos de trabalho podem promover o desenvolvimento de estratégias de resposta a tarefas matemáticas, estimular as condições metacognitivas do aluno, as habilidades e as motivações. Uma primeira aproximação ao que se entende por auto-regulação em Matemática é coerente com a apresentada por Schoenfeld (1992): "conhecimento e intuição individuais que moldam a forma como cada um conceptualiza e se envolve no comportamento matemático" (p. 358). Por exemplo, existem alunos que usam notas de leitura com resumos de conteúdos, outros que fazem uma reflexão antecipada sobre o que lhes é solicitado (Dias e Santos, 2008a), ou ainda, outros podem traduzir a questão por outras palavras para obter uma maior compreensão do que lhes é solicitado (Dias, 2005). O confronto e o conhecimento destas diferentes formas de actuação pode levar o professor a avaliar a sua forma de agir e a procurar abarcar um maior número de alunos, e implementar estratégias diversificadas.

A literatura, quer portuguesa (Santos, 2002), quer estrangeira (Perrenoud, 1999), sugere que o sucesso passa, assim, pela oportunidade de, usando espaços formais e informais de aprendizagem, promover nos alunos a autonomia, a eficácia e a capacidade de trabalharem por si mesmos, por outras palavras, promover a aquisição, a utilização e o desenvolvimento de estratégias de auto-regulação da aprendizagem por parte dos alunos. A

[13] O projecto King's-Medway-Oxfordshire Formative Assessment (KMOFAP) iniciou-se em 1999, sendo apoiado e financiado por dois anos pela US National Science Foundation and the Nuffield Foundation, (http://www.kcl.ac.uk/schools/sspp/education/research/groups/assess.html).

metodologia de sala de aula para a optimização do processo de ensino e aprendizagem implica a constante interacção professor-aluno e o desenvolvimento de vários modos de intervenção e de feedback.

PROMOVER A AUTO-REGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Apresentam-se, a seguir, duas acções do professor para promover a auto-regulação da aprendizagem matemática dos alunos, o feedback dado no diálogo na sala de aula e o feedback dado na escrita avaliativa.

Feedback dado no diálogo na sala de aula

Caracteriza-se por um feedback interactivo, que para Black e Wiliam (2006) é central na implementação de uma prática de avaliação formativa. Este tipo de feedback resulta da necessidade do professor responder às dúvidas colocadas pelos alunos, em turma, quando se permite que discutam e procurem respostas alternativas e diversificadas a uma questão. Por esta via, os processos de ensino caminham no sentido de satisfazer aquilo que realmente os alunos precisam (Black e Wiliam, 2006). Na tentativa de desenvolvimento desta perspectiva, os professores tendem a procurar prever as questões que lhes serão colocadas pelos alunos, exploram-nas e estabelecem os indicadores que mostram o que os alunos compreenderam. Eles levam os alunos a formular respostas correctas e a reformularem-nas de forma a aproximarem-se do que se considera ser a compreensão. O desenvolvimento deste estilo interactivo, diálogo na sala de aula, requer uma alteração radical no que se considera ser o ensino tradicional (Zabala, 1998; Black e Wiliam, 2006), uma vez que o professor perde o papel principal de condução da aula e terá de responder aos estímulos que têm origem nos alunos.

Feedback dado na escrita avaliativa

Toda a regulação pedagógica faz-se através de um processo de comunicação, seja ele oral ou escrito. Mas, segundo Santos e Dias (2007), o dizer avaliativo não é sinónimo de regulação pedagógica. Para as autoras é apenas um primeiro passo. Corresponderá a um processo de regulação apenas quando o feedback é usado pelo aluno para melhorar a sua aprendizagem (Wiliam, 1999). Acrescente-se, o apontar pistas de acção futura, de forma que a partir dela o aluno saiba como prosseguir, o incentivar o aluno a reanalisar a sua resposta, o não incluir a correcção do erro, no sentido de dar ao próprio a possibilidade de ser ele mesmo a identificar o erro e a alterá-lo de forma a permitir que aconteça uma aprendizagem mais duradoura ao longo do tempo (Nunziati, 1990; Jorro, 2000), o identificar o que já está bem feito, no sentido de não só dar autoconfiança como igualmente permitir que aquele saber seja conscientemente reconhecido. Wiliam (1999) alerta que para o feedback produzir efeitos no aperfeiçoamento do desempenho dos alunos, e como tal para a sua aprendizagem, a escrita avaliativa deve ser focada naquilo que é preciso ser feito para melhorar o desempenho. Para além disso, deve incidir sobre situações em fase de desenvolvimento e ainda não sujeitas a qualquer tipo de classificação, para que o feedback possa ser considerado pelos alunos como útil. Num trabalho já acabado, não faz sentido qualquer reformulação. Existem, contudo, outros factores, para além das características do feedback, que podem influenciar a sua eficácia. Caso das concepções dos alunos e do seu desempenho escolar (Santos e Pinto, 2009).

METODOLOGIA

Para a concretização deste estudo foi criado um contexto de trabalho colaborativo, em que dois professores do ensino secundário trabalharam com o investigador, primeiro autor deste texto, também professor do ensino secundário (Boavida e Ponte, 2002). Durante dois anos lectivos, num tempo semanal de noventa minutos, marcado entre os envolvidos, para além do seu horário lectivo, os três professores seleccionaram e adaptaram tarefas matemáticas para promover a auto-regulação das aprendizagens pelos alunos. O investigador, como observador participante, é o único que participa, em parceria com o professor titular da turma, nas aulas em que as tarefas planificadas são implementadas. A estratégia de trabalho colaborativo surgiu da necessidade de construir um sentido comum, e partilhado, de avaliação, de planificação de aulas, e, ainda, de partilha de problemas e de dúvidas que surgiam ao longo do desenvolvimento do projecto.

Na concretização deste estudo foi usada uma metodologia de investigação de natureza qualitativa (Bogdan e Biklen, 1994), assumindo-se um paradigma interpretativo. Através de um design de estudo de caso, são estudados dois casos, no entanto, para este texto relata-se apenas uma tarefa, implementada por um dos casos – o José.

José, um dos elementos do grupo de trabalho, é um professor com cerca de trinta anos de serviço. A sua formação base é a licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial, ramo Mecânica Térmica. Ao nível da actividade lectiva, já leccionou todos os níveis, desde o 7.º ao 12.º ano de escolaridade. Vê-se como um profissional que cumpre todas as obrigações inerentes à profissão, embora reconheça algumas dificuldades, “como tantos outros professores”. É visto, pelos seus pares, como um profissional empenhado e competente, aberto à inovação e disponível para enfrentar desafios profissionais.

Os alunos envolvidos, neste estudo, fazem parte de uma turma do curso profissional de técnico de informática e apresentam bastantes dificuldades ao nível da Matemática. O Alexandre tem 17 anos e é o melhor aluno da turma ao nível das classificações, mas é considerado distraído e conversador pelo professor. O Davide tem 18 anos, é pouco assíduo, participa pouco nas tarefas lectivas, mas para o professor revela apetência para a Matemática. Segundo o Alexandre, o seu percurso escolar e pessoal empurraram-no para a via profissional, mas pretende fazer exame de Matemática no 12.º ano e prosseguir estudos:

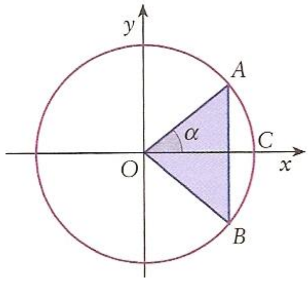
> Eu até gostava de matemática…mas, os professores são muito exigentes e eu não tenho quem me apoie em casa…por isso fui chumbando. Agora, estou a tentar de novo, quero ir para informática. Estas tarefas são fixes, e eu aplico-me nelas. (Alexandre durante a aula de José, na realização da 1ª versão, 9/11/2009)

A estratégia implementada, para a promoção da auto-regulação da aprendizagem matemática, passou pela elaboração de um relatório com os resultados da exploração de uma tarefa de trigonometria. A avaliação realizada pelo professor, e que serviu de base à construção do feedback, situou-se na aproximação, ou no afastamento, da produção dos alunos a um modelo com seis níveis, dos quais se apresentam o nível 6 e o nível 1:

> Resposta exemplar (nível 6): dá uma resposta completa com uma explicação clara, coerente, lógica e elegante; inclui figuras e esquemas para exemplificar; comunica eficazmente; mostra compreensão das ideias e processos matemáticos do problema; identifica todos os elementos importantes do problema; envolve exemplos e contra-exemplos; apresenta argumentos fortes para justificar.
>
> Resposta inadequada (nível 1): as palavras usadas não reflectem o problema; os esquemas não representam a situação problemática; falha na indicação da informação apropriada.

A tarefa foi dada aos alunos impressa em papel, com a indicação para ser realizada a pares. Os alunos organizaram-se para trabalhar segundo as suas preferências, sem que o professor tenha tido intervenção na formação dos grupos. O professor circulou pela sala e apoiou os alunos na concretização da tarefa. A tarefa (Figura 1) foi realizada em duas fases: na primeira, num bloco de 90 minutos, os alunos tiveram o primeiro contacto com a tarefa, resolveram-na, e efectuaram a 1ª versão do documento escrito; na segunda, num segmento de 45 minutos, os alunos tiveram acesso ao feedback escrito, dado pelo professor, e redigiram a 2ª versão (Figura 2).

Figura 1. Tarefa proposta



Na figura estão representados, em referencial o.n. Oxy, o círculo trigonométrico e um triângulo [OAB]. Os pontos A e B pertencem à circunferência. O segmento [AB] é perpendicular ao semieixo positivo Ox. O ponto C é o ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox. Seja α a amplitude do ângulo COA, e $\alpha \in]0, 90º[$. Considere o ponto D, como sendo a intersecção do eixo Ox com o segmento de recta [AB].

1. Mostre que a área do triângulo [OAB], em função de α, é dada por cosα.senα.

2. Utilize as capacidades gráficas da calculadora gráfica para resolver as questões que se seguem. Para isso desenhe o gráfico da função f(x)=cosα.senα, utilizando na calculadora a janela de visualização $[0,100] \times [-1,6; 1,6]$.

    2.1. Calcule a área do triângulo [OAB] para α = 60º, com duas casas decimais. Classifique o triângulo obtido quanto ao comprimento dos lados. Justifique a sua resposta.

    2.2 Para um valor da amplitude do ângulo α, a área do triângulo [OAB] é $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Determine esse valor.

Para a recolha de dados foram observadas, e áudio gravadas, as duas aulas de desenvolvimento da tarefa, bem como duas sessões de trabalho colaborativo. Nas aulas gravou-se a voz do professor titular da turma, nas sessões de trabalho colaborativo foram gravadas as intervenções dos três professores. Em colaboração, efectuou-se a selecção e planificação da actividade a realizar em sala de aula. As aulas e as sessões de trabalho colaborativo foram transcritas, integralmente. Foram, também, recolhidas as produções realizadas pelos alunos. Para compreender as acções do professor, e o impacto nos alunos, foram considerados como domínios de análise: o feedback oral, o feedback escrito, o impacto do feedback e a capacidade de auto-regulação dos alunos.

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Feedback dado no diálogo na sala de aula

A aula começa com a distribuição da tarefa e com algumas explicações acerca da organização do trabalho em sala de aula. Assim que foi entregue a tarefa, em papel, alguns alunos manifestaram dúvidas de compreensão do enunciado ao que o professor, oralmente, respondeu, através da representação da figura no quadro, com a sua explicação, sem explicitar o resultado:

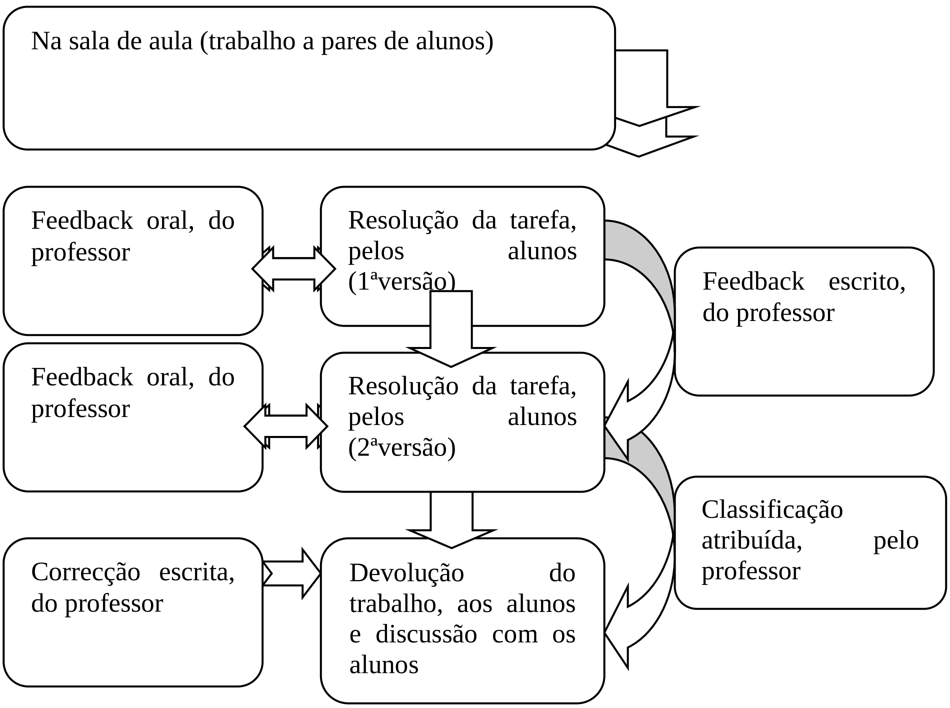
> Bem, vejam o que é que acontece. Se eventualmente, eu diminuir a amplitude do ângulo α. Reparem. Ora, eu tenho aqui o ponto A, o que é que vai acontecer?

> Quando eu diminuo, ou aumento, o ângulo? Estão a ver a ideia? Ou não? (aula de José para 1ªversão, 9/11/2009)

Para alguns alunos a explicação ao nível do levantamento de questões foi suficiente, mas para outros a dúvida manteve-se:

> Este é o ângulo alfa, que é igual a 60º, 30º e a 45º? [valores exactos usualmente usados no 11º ano] (Alexandre na aula de José para 1ªversão, 9/11/2009)

Figura 2. Processo seguido na exploração da tarefa



José acabou por explicar que para cada valor de α poderiam encontrar uma área diferente, mas o que deveriam procurar era a fórmula e não o valor, propriamente dito, da área do triângulo.

Também no item 2.1 os alunos solicitaram ao professor o esclarecimento de questões de compreensão, e José volta a responder de uma forma subtil sem que sejam dadas pistas para a resolução:

> O que é que diz o enunciado? O que é que diz o enunciado? Reparem: recorra à calculadora …. Para α = a? Para α = b? E classifique o triângulo? (aula de José para 1ªversão, 9/11/2009)

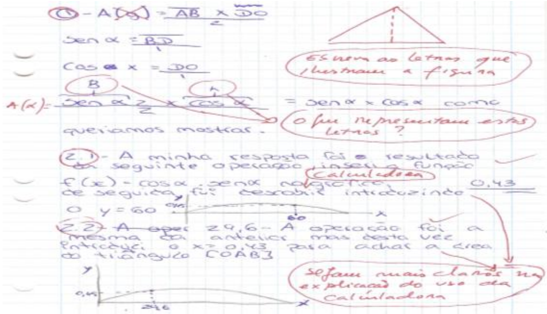
De uma forma não directa, os alunos são orientados para a resposta. Mas, os alunos não questionam o professor acerca dos aspectos organizativos da resposta, nem acerca dos aspectos incluídos nos descritores [Resposta exemplar (nível 6)]. A preocupação dos alunos situa-se na resolução do problema proposto e, para isso, evidenciam algumas estratégias de auto-regulação:

> Professor: Depois quando resolverem, aquilo que fizerem, bem ou mal, deve estar registado, eu só... dou pequenas orientações!
> Alexandre: Oh s'tor aqui temos de saber a hipotenusa. Certo?
> Professor: Exactamente.
> Davide: Então, isto é para os 2 triângulos. Vá, precisamos de ligar isto a alguma coisa. (o Alexandre lê o exercício)
> Alexandre: Isto é da trigonometria.
> Davide: Sim.
> Alexandre: (o aluno continua a ler o exercício) Temos de ir ver…o prof já explicou isto…consulta o caderno…temos de descobrir.
> Davide: Ângulo de?
> Alexandre: (o aluno continua a ler o exercício e consulta o caderno) Está aqui! O círculo trigonométrico tem raio 1. Vamos fazer a área…agora é fácil.
> (aula de José para 1ªversão, 9/11/2009)

Feedback dado na escrita avaliativa

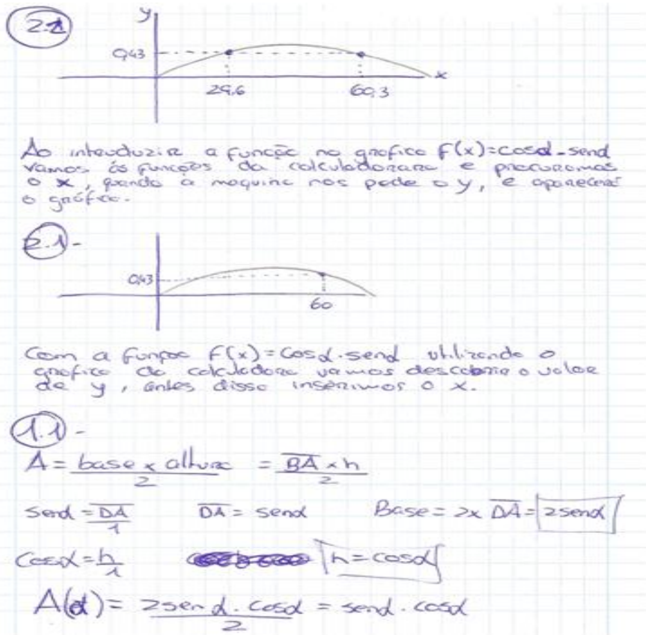
A 1ª versão da produção dos alunos revela incorrecções na escrita da fórmula da área do triângulo, o que levou o professor a alertar os alunos para esse facto. Na forma escrita, o professor também considerou que os alunos foram pouco rigorosos na construção das cadeias demonstrativas da fórmula da área do triângulo (item 1). A ausência do esboço do desenho do triângulo [OAB] e do segmento de recta que representa a altura do triângulo mostra fragilidades ao nível das concepções que os alunos têm acerca do que é a comunicação matemática. No que diz respeito aos itens 2.1 e 2.2, o professor alerta, os alunos, para a necessidade de clarificar a explicação aquando do uso da calculadora gráfica. O professor revelou que, na sua opinião, os alunos acabaram por compreender o que lhes era solicitado pois "as palavras usadas reflectem o problema".

Figura 3. 1ª versão do produto dos alunos Alexandre e Davide, com feedback



Na 2ª versão os alunos optam por efectuar um novo documento. São visíveis melhorias na apresentação das questões relacionadas com a calculadora gráfica, nomeadamente um maior cuidado na reprodução dos gráficos visualizados na calculadora e na indicação de alguns pontos notáveis. Os alunos, também, incluíram a explicação dos procedimentos usados na calculadora para a obtenção dos resultados. No que diz respeito ao item 1, continuam a não existir figuras, nem esquemas, para a explicação da resolução e apesar de apresentarem uma demonstração correcta, esta continua desorganizada.

Figura 4. 2ª versão do produto dos alunos Alexandre e Davide após o conhecimento do feedback escrito



O impacto do feedback

A avaliação realizada pelo professor decorreu ao longo da realização da tarefa. O professor reconheceu que foi importante o feedback dado durante a exploração da tarefa, quer durante a realização da 1ªversão, quer na transição para a 2ª, através dos comentários escritos:

> Nas aulas, sem as ajudas para compreenderem a tarefas…alguns não faziam nada…são de profissionais! Eles perceberam…e até agradeceram a 2ª oportunidade que lhes dei! Para eles, a 2ª versão foi uma mais-valia para a melhoria dos trabalhos. Como só classifiquei no final…adoraram! (José, sessão de trabalho colaborativo, 18/11/2009)

No entanto, o relatório final, produzido por Alexandre e Davide, foi classificado de acordo com o nível 4 da escala que mede a aproximação, ou o afastamento, da produção dos alunos:

> Resposta satisfatória (nível 4): completa o problema satisfatoriamente, mas a explicação é confusa; a argumentação é incompleta; o esquema é inapropriado ou pouco claro; compreende as ideias matemáticas subjacentes; usa as ideias eficazmente.

A atribuição desta classificação, pelo professor, sugere que o feedback dado pelo professor, através do levantamento de questões foi insuficiente para que os alunos atingissem a resposta exemplar (nível 6).

A capacidade de auto-regulação dos alunos

O professor considerou que a classificação final do trabalho foi justa, porque permite aos alunos a aproximação ao que professor pretendia que realizassem. Para além, da consciencialização, que os alunos, desenvolvem acerca das suas dificuldades e dos erros que cometem, na resolução de uma tarefa deste tipo:

> Eles [os alunos] e eu procuramos sempre fazer o melhor! Por isso, prefiro levantar algumas questões para que pensem no assunto…sem me comprometer muito com classificações elevadas…procuro que busquem a perfeição…por isso tenho sempre comentários para fazer. (José, sessão de trabalho colaborativo, 18/11/2009)

Nas sessões de trabalho colaborativo, o José referiu-se ao texto do enunciado da tarefa e à forma como estava organizada como as causas das dificuldades de compreensão, manifestadas pelos alunos. Na sua opinião, existia demasiado formalismo matemático que dificultou a abordagem dos alunos à situação:

> Eu apetecia-me fazer aqui um pequenino comentário relativamente a esta ficha. A primeira apreciação é a atitude dos miúdos, desatenção, não leram correctamente o enunciado. Estão a perceber? Principalmente a parte inicial. Em segundo lugar, acho que um problema dos meus alunos foi em relação ao *mostre que*? Como foi com os vossos? Se fosse apresentado, por exemplo, no item 1., algo semelhante ao item 2., provavelmente, sendo atribuídos valores, será que eles tinham mais facilidade em encontrar o valor, e deduzir a expressão, da Área? Sendo só com letras? Como eles costumam dizer! Foi logo um obstáculo! (…) Eu continuo a dizer, eles não leram atentamente o enunciado. Mas, fizeram a tarefa com ajuda e estavam empenhados. Perguntaram montes de vezes esta história, por causa do α: Oh professor, o que é um α? (José, sessão de trabalho colaborativo, 18/11/2009)

A capacidade de auto-regulação dos alunos situava-se ao nível de estabelecimento de âncoras entre a tarefa proposta e as que já tinham sido realizadas, em aula, anteriormente. No entanto, e apesar do feedback dado pelo professor, os alunos atribuíram maior importância ao resultado do problema do que à organização de uma resposta exemplar.

CONCLUSÃO

Os estudos sobre a aprendizagem auto-regulada são raros. Por ser um tema complexo e ainda impreciso, exige que os professores façam uma reflexão profunda sobre as suas práticas de ensino de forma a criar condições favoráveis à concretização de tais experiências. Anseia-se que o aluno assuma um papel activo na própria aprendizagem. O professor que escolhe trabalhar nesta perspectiva procura estimular os alunos para o uso de estratégias de auto-regulação, começa por planear tarefas, orienta o trabalho a ser desenvolvido para promover a avaliação, enquanto processo de permanente reflexão e comunicação, e implementa um processo de ensino em que o aluno é o elemento chave.

Nesta investigação, na planificação foi seleccionada a tarefa e usado um modelo com níveis avaliativos para dar feedback aos trabalhos realizados pelos alunos, aproximando os seus desempenhos ao modelo que é esperado pelo professor. José, em trabalho colaborativo, planeou uma tarefa e implementou-a. Na sala de aula, forneceu o feedback adequado ao prosseguimento do trabalho dos alunos, sem dar demasiadas orientações. Nomeadamente, José respondeu às solicitações dos alunos na compreensão do conceito de variável na expressão algébrica da área, e ajudou-os com o levantamento de questões (Black e Wiliam, 2006). Em aula, foi dada prioridade aos aspectos da compreensão da tarefa e da comunicação matemática. Nos relatórios, José procurou identificar o que já estava bem feito, no sentido de dar autoconfiança e permitir que aquele saber fosse conscientemente reconhecido e desenvolvido (Wiliam, 1999; Santos, 2003). Acrescentou, ainda, várias questões para a manipulação da calculadora gráfica e de comunicação matemática.

A tarefa permitiu uma abordagem exploratória, em que os alunos mobilizaram as suas capacidades metacognitivas para concretizar o trabalho que lhes era solicitado. Esta forma de trabalhar responsabilizou o aluno pela concretização da sua aprendizagem, na realização da 1ª e da 2ª versões, mas também, para o desenvolvimento de outros trabalhos na sala de aula. Os alunos desenvolveram as suas capacidades de comunicação e procuraram mobilizar as suas estruturas internas de conhecimento matemático para dar resposta às questões colocadas (Schoenfeld, 1992). Nesta investigação, a realização da 2ª versão revelou-se uma forma rica de desenvolver uma avaliação reguladora da aprendizagem. Permitiu-se que os alunos aperfeiçoassem uma 1ª versão do trabalho realizado, sendo possível repensar a situação, foram fundamentais os comentários do professor na 1ª versão, sem classificação definitiva. Os alunos atribuíram grande importância à 2ª versão, por ser portadora do feedback do professor e por permitir um segundo olhar sobre o trabalho desenvolvido na 1ª versão. Na 2ª versão, melhoraram alguns aspectos de comunicação, apresentaram gráficos e deduziram expressões algébricas, melhoraram os desempenhos.

O professor promoveu a auto-regulação quando possibilitou o trabalho de grupo (a pares), permitiu a discussão entre alunos, a interacção, o tempo adequado de confronto com a tarefa, tendo os alunos um papel activo na construção das suas próprias aprendizagens (Perrenoud, 1999; Santos, 2002). Também, a realização da tarefa em duas fases foi um aspecto integrador de uma prática lectiva promotora da auto-regulação das aprendizagens pelos alunos.

O momento avaliativo, nesta experiência, iniciou-se precocemente, quando o professor identificou falhas de compreensão e os alunos solicitaram uma simples clarificação do que é solicitado. No entanto, essa avaliação foi feita para a melhoria da aprendizagem através da ajuda à aprendizagem, dos comentários e/ou questões que o professor foi efectuando, sem dar respostas directas ou orientadoras. Também, foi possível observar que a avaliação decorreu através do incentivo à melhoria e de forma interactiva, mesmo quando se tratou de atribuir um nível de feedback ao trabalho escrito. O feedback foi uma componente central para a avaliação das aprendizagens.

REFERÊNCIAS

Alves, M. (2004). *Currículo e Avaliação – Uma perspectiva integrada*. Porto: Porto Editora.

Black, P., e Wiliam, D. (1998). Inside the Black Box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan, 80* (2): 139-148

Black, P., e Wiliam, D. (2006). Developing a theory of formative assessment. In J. Gardner (Ed.), *Assessment and Learning* (pp. 81-100). London: Sage.

Black, P.; Harrison, C.; Lee, C.; Marshall, B., e Wiliam, D. (2003). *Assessment for learning: Putting it into practice*. Berkshire, Inglaterra: Open University Press.

Boavida, A. e Ponte, J. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Bobb-Wolff, L. (2002). Assessment: Changing assumptions and attitudes. In F. Vieira, M. Moreira, I. Barbosa e M. Paiva (Eds.), Pedagogy for autonomy and English learning: *Proceedings of the 1st conference of the working group – Pedagogy for autonomy*. Braga: Universidade do Minho.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e métodos*. Porto: Porto Editora.

Dias, P. (2005). *Avaliação reguladora no Ensino secundário. Processos utilizados pelos alunos em investigações Matemáticas*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Dias, P., e Santos, L. (2008a). Reflectir antes de agir. A avaliação reguladora em Matemática B. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes e C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 163-171). Viseu: SEM SPCE.

Dias, P., e Santos, L. (2008b). *Reflect before you act, regulatory practice assessment for learning*. ICME11

Fernandes, D. (2006). *Para uma teoria da avaliação formativa. Revista Portuguesa de Educação, 19*(2), pp. 21-50.

Gardner, J. (2006). *Assessment and Learning*. London: Sage.

Hadji, C. (1994). *A avaliação, regras do jogo: Das intenções aos instrumentos*. Porto: Porto Editora.

Jorro, A. (2000). *L'enseignant et l'évaluation. Des gestes évaluatifs em question*. Bruxelles: De Boeck.

Menino, H., e Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática. O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2º ciclo do ensino básico. *Actas do XV SIEM* (pp. 271–291). Lisboa: APM.

Nunziati, G. (1990). *Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice. Cahiers Pédagogiques*, 280, 47–64.

Perrenoud, P. (1999). *Avaliação. Da excelência à regulação das aprendizagens. Entre duas lógicas.* Porto Alegre: ArtMed (Trabalho original em francês, publicado em 1998).

Roullier, J. (2004). A auto-avaliação de um projecto de escola: profissionalização de um actor colectivo. *Revista de Estudos Curriculares*, *2* (2), 239-261.

Santos, L. e Pinto, J. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. *Proceedings of the 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 5, 49-56.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes e F. Araújo (Coords.). *Avaliação das aprendizagens* (pp. 77-84). Lisboa: Ministério da Educação, DEB.

Santos, L. (2003). Avaliar competências: uma tarefa impossível? *Educação e Matemática*, *74*, 16–21.

Santos, L. (2004). O ensino e a aprendizagem da Matemática em Portugal: Um olhar através da avaliação. *Actas del octavo simposio de la sociedad española de investigación en educación Matemática* (S.E.I.E.M.) (pp. 127-151). Coruña.

Santos, L., e Dias, S. (2007). Será que os alunos compreendem o que lhes escrevem os professores? *Educação e Matemática*, 94, 11-16.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving metacognition and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp.334-370). New York: MacMillan.

Soares, C. (2007). *A auto-avaliação em línguas estrangeiras: concepções e práticas dos professores*. (Tese de mestrado, Universidade do Minho)

Stiggins, R. (1995). *Assessment Literacy for the 21st Century*. Phi Delta Kappan, 77 (3), 238-245.

Stiggins, R. (2005). *Student-Involved Assessment for Learning*. NJ: Pearson/Merrill Prentice Hall.

Wiliam, D. (1999). Formative assessment in mathematics. *Equals: mathematics and Special Educational Needs, 5* (3), 8–11.

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: Como ensinar.* Porto Alegre: Artmed.

Comunicação matemática na resolução de problemas com a folha de cálculo

Nélia Amado
FCT, Universidade do Algarve e CIEFCUL
Sandra Nobre
Escola EB 2,3 Professor Paula Nogueira, Olhão
Susana Carreira
FCT, Universidade do Algarve e CIEFCUL
João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa e CIEFCUL

RESUMO

Este artigo analisa a comunicação matemática ocorrida na resolução de um problema lançado no Campeonato de Resolução de Problemas Sub 14, onde se observa a conjugação do uso da folha de cálculo com a comunicação do raciocínio algébrico. Os dados analisados são provenientes de duas fontes distintas: (i) as resoluções de um conjunto de alunos aos quais foi proposto o problema numa aula de estudo acompanhado e (ii) algumas das respostas recebidas, por e-mail, de alunos participantes no Campeonato. Em ambos os casos, trata-se de alunos do 8.º ano. Nas resoluções dos participantes no Campeonato, centramo-nos nas representações externas (escritas) apresentadas para sustentar a justificação do raciocínio. No que se refere aos dados recolhidos em sala de aula, para além deste tipo de representação, analisamos os diálogos dos alunos bem como a sequência de ecrãs do computador captados durante a resolução do problema. A análise dos dados obtidos nestes dois ambientes – sala de aula e resposta enviada por e-mail – mostra-nos que a resolução deste problema algébrico e a comunicação matemática envolvida são fruto de uma "co-acção" entre o indivíduo e a folha de cálculo. Em sala de aula, observou-se que o papel da professora foi importante para tornar mais transparente o funcionamento da folha de cálculo, em especial, com os alunos para os quais esta ferramenta parecia mais opaca.

O estudo da comunicação matemática dos alunos na resolução de problemas com recurso ao Excel reveste-se de particular interesse, uma vez que o uso desta ferramenta proporciona formas de representação pouco estudadas e que estão presentes no desenvolvimento do raciocínio algébrico. Neste artigo, analisamos a resolução de um problema do Campeonato de Resolução de Problemas Sub 14[14]. Os dados apresentados provêm de duas fontes distintas: (i) a sala de aula, que inclui a comunicação oral e escrita e os *outputs* da folha de cálculo e (ii) as respostas enviadas por e-mail de alunos participantes no Campeonato que se apresentam na forma escrita mas que também exibem os *outputs* da folha de cálculo.

[14] www.fct.ualg.pt/matematica/5estrelas/.

Pretendemos analisar a comunicação matemática na resolução de um problema, em particular debruçar-nos sobre as representações que os alunos elaboram com recurso ao Excel, na tentativa de perceber o tipo de mediação proporcionado por esta ferramenta na resolução de problemas pelos alunos.

As representações constituem ferramentas para aprender e comunicar matematicamente (Zazkis e Liljedahl, 2004), que assumem um duplo papel. Trata-se de recursos que servem o propósito de comunicar com os outros acerca de um problema ou uma ideia mas também são instrumentos que ajudam a alcançar a compreensão de uma propriedade, um conceito ou um problema (Boavida, Amado e Coelho, 2009; Dufour-Janvier, Bednarz e Belanger, 1987). Esta é uma das razões que nos levam a encarar o uso das representações pelos alunos como lentes a partir das quais se pode captar o sentido que estes atribuem aos processos matemáticos na resolução de um problema.

O pensamento algébrico é hoje considerado como uma forma de raciocinar matematicamente que não se esgota na manipulação de símbolos. Defende-se que o trabalho desenvolvido em contextos que envolvam números, relações funcionais, regularidades, propriedades e outros, constitui uma base fundamental para a compreensão das estruturas algébricas e dos símbolos desde que em torno dos significados que estes tomam: “Os problemas de palavras oferecem uma forma de dar sentido às expressões algébricas e simultaneamente de ligar o trabalho dos alunos em álgebra com as suas experiências em problemas numéricos” (Ainley, 1995, p. 26)

A comunicação matemática ganha particular interesse quando se aborda a álgebra, procurando dar-lhe um sentido. Na construção desse sentido são decisivas as representações que os alunos criam espontaneamente ou que as actividades de ensino promovem. Neste contexto, o recurso à tecnologia contribui para alargar o horizonte representacional. Mas a melhoria da capacidade representacional é uma oportunidade oferecida pela tecnologia e não um resultado automático do recurso a uma ferramenta tecnológica, como veremos adiante no caso do Excel.

A folha de cálculo não foi concebida como uma ferramenta educacional mas sim como um recurso para as áreas financeiras. No entanto, tem-se revelado como um recurso pedagógico com grande potencial para a construção de conceitos algébricos, nomeadamente, para o estabelecimento de relações funcionais, representação de sequências ou de procedimentos de natureza recursiva usados na resolução de problemas de Matemática. O vocabulário utilizado neste ambiente é distante daquele que é habitual em Matemática – “o utilizador tem de ser ele próprio a criar uma linguagem, pois não existe uma tradução oficial para o ajudar” (Haspekian, 2003, p. 123). Quando esta função é colocada ao professor de Matemática, é ele que tem de procurar construir este vocabulário com os seus alunos: o que representa uma célula, uma coluna, uma fórmula, o que significa arrastar para baixo a alça de uma célula com uma fórmula, o feedback numérico devolvido pelo computador, etc.

A COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA E AS REPRESENTAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A comunicação matemática assume actualmente grande importância na Matemática escolar. No novo programa de Matemática do ensino básico, a comunicação matemática é considerada como uma capacidade transversal a desenvolver, em paralelo com outras e com a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Na resolução de um problema de Matemática é importante a capacidade de registo e organização da informação, a clareza na expressão de ideias e a construção de uma argumentação sólida. As representações constituem um meio fundamental para ajudar nesta clarificação e para exprimir o conhecimento matemático. Porém, os sistemas de representação podem ser *transparentes* ou *opacos*. Esta distinção, feita por Lesh, Behr e Post (1987), significa que as representações podem estar mais próximas das ideias que pretendem ilustrar ou estar mais afastadas, quando destacam ou salientam apenas alguns aspectos dessas ideias, desvanecendo outros. Esta transparência/opacidade dos sistemas representacionais tem vindo a ser aprofundada por Zazkis e Liljedahl (2004) que consideram existir um certo grau de opacidade em qualquer representação. No caso do sistema de representações da folha de cálculo, o primeiro contacto em ambiente educacional sugere uma grande opacidade, que todavia se vai desfazendo à medida que os alunos vão ganhando, ora familiaridade com a linguagem especifica do Excel ora maior destreza em manter uma conexão entre o pensamento algébrico e as operações realizadas *com* e *pelo* Excel.

Na literatura surgem tradicionalmente duas categorias de representações: “internas” e “externas”. No primeiro caso, encontram-se as imagens mentais que correspondem às formulações internas construídas pelo indivíduo sobre uma dada realidade. No segundo caso, trata-se das organizações simbólicas externas (símbolos, figuras, diagramas, gráficos, etc.) que têm por objectivo representar ou codificar uma determinada “realidade matemática” (Dufour-Janvier et al., 1987; Goldin, 2008). Considera-se que um aluno, perante uma situação problemática, deve ser capaz de optar por um certo sistema de representação e tirar partido deste. Para isso, deve ter oportunidade para avaliar a eficácia de determinados modos de representação e de interiorizar o seu significado: “As representações são úteis para o aluno, desde que ele as consiga usar eficazmente” (Dufour-Janvier et al., 1987, p. 121).

O EXCEL COMO FERRAMENTA MEDIADORA DA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

A folha de cálculo dá acesso a diferentes tipos de representações (Haspekian, 2005):

Linguagem natural – é possível introduzir e editar um texto em qualquer célula, de acordo com o contexto do problema, em particular para a atribuição de rótulos a colunas ou a escrita de um comentário;

Introdução de fórmulas – é possível realizar automaticamente operações que envolvem as células que contêm dados do problema ou que resultam de outros cálculos;

Construção de gráficos – a construção de gráficos dinâmicos, a partir de dados numéricos já inseridos, é uma das mais conhecidas funcionalidades deste software e uma das que mais cedo é apresentada aos alunos;

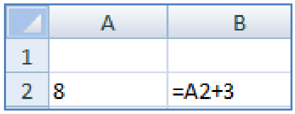
Registo "variável-numérica" – é uma funcionalidade específica da folha de cálculo que diz respeito ao registo numérico mas, ao mesmo tempo, apela à noção de variável. Permite a variação de valores numéricos concretos para obter diferentes resultados, por exemplo, para resolver problemas através da tentativa-e-erro. Em muitos casos, pode comparar-se esta funcionalidade à criação de um parâmetro que se pretende estudar.

A linguagem da folha de cálculo suporta a conexão entre diferentes registos (numéricos, relacionais, gráficos). No caso da álgebra, pode ajudar os alunos a encontrar relações entre as variáveis presentes num dado problema. Para além disso, fornece meios de controlo com base no *feedback* numérico instantâneo e constante, que permite fazer experiências, estabelecer conjecturas e até encontrar possíveis erros.

A utilização da folha de cálculo na resolução de problemas acentua a necessidade de identificar todas as variáveis relevantes e, além disso, estimula a procura de relações de dependência entre as variáveis. A definição de relações intermédias entre as diversas variáveis, por meio de fórmulas, isto é, a decomposição de uma relação de dependência em sucessivas relações mais simples é um dos aspectos a salientar nesta ferramenta, com consequências decisivas no processo de resolução de problemas (Carreira, 1992; Haspekian, 2005). A folha de cálculo permite ainda dar uma organização algébrica a uma resolução aparentemente aritmética (Haspekian, 2005).

Uma célula da folha de cálculo pode assumir diversos significados como se ilustra no exemplo seguinte (fig. 1):

Figura 1: A2 é o argumento da célula e B2 calcula a soma do valor de A2 com 3.



	A	B
1		
2	8	=A2+3

A célula A2 pode ser vista como:

(A) Referência abstracta geral: representa uma variável (a fórmula refere-se a A2 fazendo-a desempenhar o papel de variável);

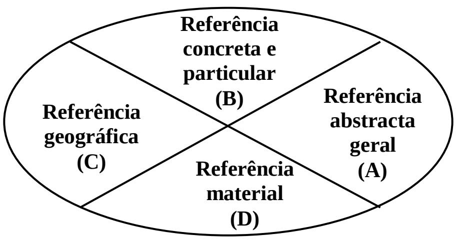
(B) Referência concreta e particular: o número introduzido (8);

(C) Referência geográfica: localização, coluna A, linha 2;

(D) Referência material: um compartimento da grelha, que alguns alunos encaram como uma caixa.

Os três primeiros significados não encontram correspondência quando se trabalha com papel e lápis

. Figura 2: A "variável-célula".



A célula B2 pode assumir um duplo papel. Na figura 1, B2 refere-se a uma fórmula, mas pode vir a desempenhar o papel de variável para uma fórmula noutra célula. Uma das funções que torna mais distinta esta ferramenta é o arrastamento, ao longo de uma coluna, da alça de uma célula que contém uma fórmula. Esta acção gera uma "variável-coluna".

Os números presentes nas células da folha de cálculo podem ter uma natureza diversa. Um número pode ser um *input* numérico, um *output* de uma fórmula, ou ainda um *output* de uma sequência numérica linear com incremento gerada automaticamente pelo Excel. No caso em que o número é um *output* de uma fórmula, a aparência corrente da célula é a de um número. No entanto, a célula pode mostrar temporariamente a sua aparência de fórmula – quer no momento em que se introduz essa fórmula ou, posteriormente, quando o cursor é colocado sobre célula e se observa a barra de fórmulas. Assim, uma característica importante da folha de cálculo é a de encobrir as fórmulas (ou seja, a parte algébrica), mantendo sempre visível a parte numérica (Haspehkian, 2003).

A UTILIZAÇÃO DO EXCEL E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Na escrita simbólica de relações numéricas tem-se privilegiado a utilização de letras. No entanto, a utilização de ferramentas tecnológicas permite outras representações para essas relações, bem como novas formas de exploração, que podem ser vistas como análogas às actividades de geração e de transformação da álgebra. Deste modo, parece apropriado que essas novas representações das relações numéricas, assim como o pensamento a elas associado, sejam incluídos no domínio da álgebra (Kieran, 1996). Assim, o pensamento algébrico é uma forma de pensamento que se exprime através de representações que não têm, necessariamente, de incluir a utilização de letras.

A folha de cálculo é reconhecida por diversos autores (e.g., Ainley et al., 2004; Detori et al., 2001; Rojano, 2002) como uma ferramenta bastante útil na resolução de problemas e, em particular, no desenvolvimento do pensamento algébrico. A representação simbólica na folha de cálculo das relações presentes num problema, é iniciada através da nomeação de colunas e da escrita de fórmulas. Este recurso proporciona um ambiente de trabalho estimulante que favorece uma maior compreensão das relações de dependência entre as variáveis e estimula os alunos a apresentarem gradualmente resoluções algébricas em detrimento de métodos aritméticos (Rojano, 2002).

Esta ferramenta contribui igualmente para que os alunos pensem algebricamente, com base nas referências das células para expressar o seu raciocínio, criando uma ponte entre a linguagem natural e a notação algébrica (Ainley et al., 2004). A folha de cálculo, na medida em que é híbrida e coabita num mundo de alternância/transição entre a aritmética e a álgebra (Haspehkian, 2005), é uma boa ferramenta de mediação semiótica. Constitui, assim, uma opção didáctica para ajudar os alunos na transição da aritmética para a álgebra (Kieran, 1996; Rojano e Sutherland, 1997).

METODOLOGIA

Neste trabalho adoptamos uma metodologia qualitativa de carácter interpretativo. Uma vez que o objectivo é analisar a comunicação matemática na resolução de um problema em Excel em dois ambientes distintos, procedemos à selecção das resoluções recebidas no Campeonato de acordo com a sua representatividade, perante o conjunto de resoluções em Excel enviadas pelos participantes. Em sala de aula, foram recolhidos dados dos processos de resolução de dois alunos de duas turmas diferentes.

Ao longo das várias edições do Campeonato, temos encontrado uma grande variedade de processos de resolução dos problemas. Os concorrentes recorrem ocasionalmente ao Excel, uma ferramenta que pelos motivos já apresentados não é de fácil apropriação, mas que é bastante vantajosa para a resolução de determinado tipo de problemas. Este aspecto despertou-nos o interesse em conhecer de um modo mais profundo a forma como os alunos criam as suas representações em Excel e de que modo este trabalho se desenvolve no ambiente da aula de Matemática, quando o professor estimula a utilização da folha de cálculo na resolução de problemas algébricos. Com efeito, desde o início do ano lectivo, que nas aulas de Estudo Acompanhado, tem sido promovida regularmente a resolução de problemas com recurso ao Excel. O contacto com esta ferramenta proporcionou à generalidade dos alunos noções básicas de funcionamento da folha de cálculo, havendo alguns deles que revelam uma apropriação desta ferramenta bastante mais avançada. Ao longo das aulas têm sido recolhidos dados, em particular, registos gravados (áudio e frames do ecrã do computador) da resolução de problemas em dois computadores, por turma. Nestas aulas os alunos dispõem de computadores podendo escolher os seus métodos de resolução, nomeadamente optando pelo uso do computador ou por resolver apenas com lápis e papel.

Relativamente aos alunos que participam no Sub 14, não dispomos de qualquer conhecimento acerca da sua experiência prévia com o Excel. No entanto, consideramos relevante o facto de surgirem algumas respostas de alunos do Algarve e do Alentejo que abordam o problema proposto com recurso à folha de cálculo.

Para o registo detalhado dos processos dos alunos em sala de aula foi utilizado o software Camtasia Studio da TechSmith, versão 6.0. Este software permitiu recolher, em simultâneo, os diálogos dos alunos e a sequência de ecrãs no computador que demonstram todas as acções que foram realizando. Pudemos assim analisar os diálogos dos alunos ao mesmo tempo que observámos as suas operações na folha de cálculo, como movimentar o rato, seleccionar uma célula ou de um conjunto de células, introduzir fórmulas ou recorrer ao menu para executar determinado comando.

A análise dos dados recaiu sobre duas situações. No primeiro caso, consideramos aquilo que nos é revelado pelos alunos do Campeonato que enviam as suas resoluções e respectivas justificações (um dos requisitos indispensáveis para que o problema seja considerado totalmente resolvido). Neste caso, estamos essencialmente a debruçar-nos sobre o tipo de representações externas presentes e, em particular, sobre os aspectos fundamentais do processo de resolução na folha de cálculo (definição das colunas, relações entre as células, utilização de fórmulas, introdução de valores numéricos, criação de sequências e os *outputs* visíveis na tabela do Excel). Na segunda situação, em sala de aula, temos igualmente em atenção as representações construídas no Excel mas, além disso, temos acesso ao discurso dos alunos e da professora no decurso da actividade de resolução do problema. Desta forma, podemos conhecer aquilo que os leva a realizar determinados procedimentos e a fazer certas opções relativamente à utilização do Excel. Aqui, a linguagem oral expressa pelos alunos ao longo da resolução (acompanhada pelas intervenções da professora em certas situações) constitui um indicador muito importante do modo como interpretam o problema em termos do que é o seu conhecimento matemático e também o conhecimento desta ferramenta. Esta última parte da análise permite-nos fazer algumas inferências acerca do que é essencial na actividade de resolução de problemas algébricos com recurso ao Excel, e ajuda a compreender a articulação entre a linguagem simbólica do Excel e a linguagem algébrica.

O problema

"O tesouro do Rei Edgar"

O Rei Edgar da *Zirtuânia* decidiu dividir o seu tesouro de mil barras de ouro pelos seus quatro filhos. A ordem real é a seguinte:

1 – O 1º filho receberá o dobro de barras do 2º filho.
2 – O 3º filho receberá mais barras do que os dois primeiros juntos.
3 – O 4º filho receberá menos barras do que o 2º filho.

Qual é o **maior** número de barras de ouro que o 4º filho do Rei poderá receber?

ANÁLISE DE DADOS

Resoluções de alunos participantes no Campeonato Sub 14

Começamos por apresentar as resoluções de duas alunas que enviaram a sua resposta ao problema, em grupo. É importante realçar que, no âmbito deste Campeonato, não foi feita qualquer sugestão sobre o processo de resolução nem sobre a utilização de alguma ferramenta tecnológica. A opção pela utilização das tecnologias está ao critério dos participantes que sabem existir a possibilidade de envio de ficheiros em anexo no seu e-mail.

Estas alunas enviaram a sua resposta, incluindo em anexo um ficheiro do tipo xls, e apresentando a justificação do processo de resolução:

Figura 3: Excerto da resolução das alunas Jéssica e Dulce, de uma escola do Alentejo.

Explicação: Começámos por introduzir os valores da coluna do 2º Filho. Em seguida, preenchemos a do 1º Filho, visto que é o dobro do 2º Filho. Em seguida, fizemos a coluna do 3º Filho que é igual à soma do 1º Filho e do 2º Filho acrescentada de 1 unidade. Por fim, calculámos os valores correspondentes ao 4º Filho, efectuando a diferença entre o total e os valores do 1º, 2º e 3º Filhos em conjunto, até que o número de barras recebido pelo 4º Filho fosse o maior possível mas inferior ao do 2º Filho. Chegamos à conclusão que: 1º Filho: 286, 2º Filho: 143, 3º Filho: 430, 4º Filho: 141.

	A	B	C	D
1	1ºFilho	2º Filho	3º Filho	4º Filho
2	200	100	301	399
3	202	101	304	393
4	204	102	307	387
5	206	103	310	381
6	208	104	313	375
7	210	105	316	369
8	212	106	319	363
9	214	107	322	357
10	216	108	325	351
11	218	109	328	345
12	220	110	331	339
13	222	111	334	333
14	224	112	337	327
15	226	113	340	321
16	228	114	343	315
17	230	115	346	309
38	272	136	409	183
39	274	137	412	177
40	276	138	415	171
41	278	139	418	165
42	280	140	421	159
43	282	141	424	153
44	284	142	427	147
45	286	143	430	141
46	288	144	433	135
47	290	145	436	129
48	292	146	439	123
49	294	147	442	117
50	296	148	445	111
51	298	149	448	105
52	300	150	451	99
53				
54				

Na explicação das alunas, podemos observar o significado que deram a cada uma das quatro colunas construídas e as relações de dependência que estabeleceram entre elas. Podemos constatar, igualmente, que conhecem algumas das funcionalidades da folha de cálculo, como a nomeação de colunas e a escrita de fórmulas a partir de uma célula com um valor numérico e a partir de outras células já resultantes de fórmulas introduzidas. Um aspecto fundamental para a resolução deste problema está em adoptar uma estratégia que faça variar o número de barras destinadas ao segundo filho. Estas alunas escreveram todos os números naturais entre 100 e 150, o que lhes permitiu observar, num conjunto de valores significativo, a variação dos valores resultantes para o quarto filho.

Figura 4: As fórmulas introduzidas na folha de cálculo pelas alunas.

	A	B	C	D	
1	1ºFilho	2º Filho	3º Filho	4º Filho	
2	=B2*2	100	=A2+B2+1	=1000-A2-B2-C2	
3	=B3*2	101	=A3+B3+1	=1000-A3-B3-C3	
4	=B4*2	102	=A4+B4+1	=1000-A4-B4-C4	
5	=B5*2	103	=A5+B5+1	=1000-A5-B5-C5	
6	=B6*2	104	=A6+B6+1	=1000-A6-B6-C6	
7	=B7*2	105	=A7+B7+1	=1000-A7-B7-C7	
8	=B8*2	106	=A8+B8+1	=1000-A8-B8-C8	
9	=B9*2	107	=A9+B9+1	=1000-A9-B9-C9	
10	=B10*2	108	=A10+B10+1	=1000-A10-B10-C10	
11	=B11*2	109	=A11+B11+1	=1000-A11-B11-C11	
12	=B12*2	110	=A12+B12+1	=1000-A12-B12-C12	
13	=B13*2	111	=A13+B13+1	=1000-A13-B13-C13	
14	=B14*2	112	=A14+B14+1	=1000-A14-B14-C14	
15	=B15*2	113	=A15+B15+1	=1000-A15-B15-C15	
16	=B16*2	114	=A16+B16+1	=1000-A16-B16-C16	
17	=B17*2	115	=A17+B17+1	=1000-A17-B17-C17	
18	=B18*2	116	=A18+B18+1	=1000-A18-B18-C18	

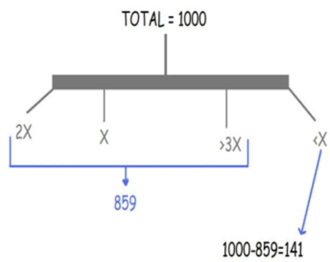
Outra resolução de um participante do Sub 14 mostra uma conjugação de duas representações: o Excel surge em paralelo com uma representação algébrica. David utiliza a coluna B como um *recipiente* onde vai colocando valores à sua vontade. Nas restantes colunas, usa fórmulas que lhe permitem obter, com alguma facilidade, a solução pretendida. Na resposta de David podemos ler:

Figura 5: Resolução do participante David, de uma escola do Algarve.

Justificação/Raciocínio: Depois de ler bem o problema pensei numa forma de resolvê-lo. Pensei que por tentativas iria consegui-lo, por isso decidi fazê-lo. Para isso, usei o Excel (está anexado um esquema e a tabela do Excel), usando fórmulas em que o 2º filho teria X barras, o 1º teria 2X, visto que no problema diz que o 1º filho tem o dobro do 2º, o 3º teria >3X (mais do que 3X), visto que no problema diz que o 3º filho terá mais barras do que os dois primeiros juntos e o 4º teria <X, visto que no problema diz que o 4º tem menos do que o 2º filho. Por tentativas, calculei até chegar a 1000 barras de ouro. Não cheguei a 1000, mas cheguei a 1001, por isso retirei uma barra para ficar em 1000. No final o 4º filho tinha 141 barras.

Figura 6: Excerto da tabela com as fórmulas usadas por David na folha de cálculo

	A	B	C	D	E
1	20	10	31	9	70
2	50	25	76	24	175
3	100	50	151	49	350
4	200	100	301	99	700
5	202	101	304	100	707
6	204	102	307	101	714
7	240	120	361	119	840
8	250	125	376	124	875
9	260	130	391	129	910
10	280	140	421	139	980
11	282	141	424	140	987
12	284	142	427	141	994
13	286	143	430	141	1000
14	0		1	-1	
15	0		1	-1	
16	0		1	-1	
17	0		1	-1	
18	0		1	-1	
19	0		1	-1	
20	0		1	-1	
21	0		1	-1	



	A	B	C	D	E
1	=2*(B1)	10	=(A1+B1+1)	=(B1-1)	=(A1+B1+C1+D1)
2	=2*(B2)	25	=(A2+B2+1)	=(B2-1)	=(A2+B2+C2+D2)
3	=2*(B3)	50	=(A3+B3+1)	=(B3-1)	=(A3+B3+C3+D3)
4	=2*(B4)	100	=(A4+B4+1)	=(B4-1)	=(A4+B4+C4+D4)
5	=2*(B5)	101	=(A5+B5+1)	=(B5-1)	=(A5+B5+C5+D5)
6	=2*(B6)	102	=(A6+B6+1)	=(B6-1)	=(A6+B6+C6+D6)
7	=2*(B7)	120	=(A7+B7+1)	=(B7-1)	=(A7+B7+C7+D7)
8	=2*(B8)	125	=(A8+B8+1)	=(B8-1)	=(A8+B8+C8+D8)
9	=2*(B9)	130	=(A9+B9+1)	=(B9-1)	=(A9+B9+C9+D9)
10	=2*(B10)	140	=(A10+B10+1)	=(B10-1)	=(A10+B10+C10+D10
11	=2*(B11)	141	=(A11+B11+1)	=(B11-1)	=(A11+B11+C11+D11
12	=2*(B12)	142	=(A12+B12+1)	=(B12-1)	=(A12+B12+C12+D12
13	=2*(B13)	143	=(A13+B13+1)	141	=(A13+B13+C13+D13
14	=2*(B14)		=(A14+B14+1)	=(B14-1)	
15	=2*(B15)		=(A15+B15+1)	=(B15-1)	
16	=2*(B16)		=(A16+B16+1)	=(B16-1)	

David exibe um esquema ilustrativo (construído com um editor de objectos de desenho) da distribuição das barras de ouro pelos quatro filhos. Os dois tipos de representação complementam-se, mas são de natureza distinta. O esquema e o tipo de simbologia utilizados estão próximos daquilo que seria típico de uma resolução com lápis e papel, enquanto que a resolução na folha de cálculo possui características singulares e impossíveis de operacionalizar noutro ambiente. No seu esquema e na sua explicação escrita, o aluno mostra como estabelece uma correspondência entre a linguagem simbólica algébrica e a linguagem simbólica do Excel. Este aluno é o único que consegue encontrar as duas situações em que o 4.º filho pode receber as 141 barras de ouro.

Resoluções em sala de aula com o Excel

Apresentamos em seguida o trabalho de dois alunos – Marcelo e Marta – numa aula de Estudo Acompanhado, em que a professora de Matemática da turma propôs o problema.

Marta é uma aluna com um bom desempenho na disciplina de Matemática, ao passo que Marco apresenta, por vezes, algumas dificuldades. Ambos resolveram o problema individualmente, solicitando a intervenção da professora quando sentiram essa necessidade.

A resolução de Marcelo (37 minutos)

O aluno começou por introduzir manualmente, na coluna A, os múltiplos de 100 até 1000, mas não voltou a usar esta coluna. Em seguida, destinou uma coluna a cada um dos quatro filhos e uma quinta coluna para o total de barras de ouro, escrevendo os respectivos títulos. Depois foi escrevendo valores nas células, pela ordem seguinte: 2.º, 1.º, 3.º e 4.º. Faz o seguinte: atribui um valor ao 2.º filho, depois calcula mentalmente o dobro para o 1.º filho; para o 3.º soma o valor do 1.º com o 2.º e adiciona-lhe mais um, e para o 4.º calcula o valor que falta para 1000. A única fórmula que criou surge na coluna H, que funciona como controlo do valor total de barras.

Após vários ensaios, o aluno chama a professora.

Marcelo: Professora, já tenho o máximo! [Tinha obtido 139 na célula G6]. Com 150 já não dá. Já fiz.
Professora: Onde é que tu fizeste?
Marcelo: Aqui. [aponta para a linha 3]
Professora: Mas não deste o número máximo de barras ao 4.º filho, pois não?
Marcelo: Está dependente do 450. E por isso, o valor máximo é 99.
Professora: E se experimentares com um número pouco maior do que 150?
Marcelo: Já tentei com 160 e 170.
Professora: E se experimentares o 151?
Marcelo: Mas assim não dá, vai aumentar ali. [aponta para a coluna do 3.º filho]

Figura 7: Resolução de Marcelo.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	100			1º filho	2º filho	3º filho	4º filho	Total	
2	200			200	100	601	99	1000	
3	300			300	150	451	99	1000	
4	400			240	120	521	119	1000	
5	500			260	130	481	129	1000	
6	600			280	140	441	139	1000	
7	700			290	145	436	129	1000	
8	800			284	142	433	141	1000	
9	900			286	143	430	141	1000	
10	1000			288	144	433	135	1000	
11									

Figura 8: O modo como Marcelo usa a folha de cálculo.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	100			1º filho	2º filho	3º filho	4º filho	Total
2	200			200	100	601	99	=D2+E2+F2+G2
3	300			300	150	451	99	=D3+E3+F3+G3
4	400			240	120	521	119	=D4+E4+F4+G4
5	500			260	130	481	129	=D5+E5+F5+G5
6	600			280	140	441	139	=D6+E6+F6+G6
7	700			290	145	436	129	=D7+E7+F7+G7
8	800			284	142	433	141	=D8+E8+F8+G8
9	900			286	143	430	141	=D9+E9+F9+G9
10	1000			288	144	433	135	=D10+E10+F10+G10
11								

Professora: Sim, vai aumentar aqui e depois não dá. Mas aqui já te deu um excelente valor e aumentou bastante do 130 para o 140 [refere-se à coluna E]. Experimenta em torno desses valores.
Marcelo: Vou fazer com 145.
Professora: Melhorou alguma coisa?

O aluno continua a fazer tentativas mas demora algum tempo a fazer os cálculos mentalmente e a professora pergunta-lhe:

Professora: Mas porque é que tu não pões o Excel a fazer as contas?

O aluno parece não saber o que responder. Percebe-se que a sua apropriação das potencialidades da ferramenta é ainda muito reduzida. Marcelo continua a fazer os cálculos mentalmente e chega a 141 barras para o 4.º filho, quando atribuiu 142 barras ao 2.º.

Professora: Melhorou!… Estás a ver, parece que entre o 140 e o 145 está-se a passar muita coisa! Podemos, por exemplo, experimentar para todos os valores que estão entre 140 e entre 145 para ver o que acontece. Vamos ver se haverá ainda algum melhor.

O aluno experimenta o 143 no 2.º filho, obtendo 141 para o 4.º filho. Tenta depois o 144 para o 2.º filho, obtendo apenas 135 barras para o 4.º filho.

Professora: Por que razão não podes ter 142 para o 4.º filho quando o 2.º recebe 143? Uma vez que queremos o máximo?...
Marcelo: Aqui é obrigado a estar 430 [na célula F9]. E aqui não dá para pôr 142 [na célula G9] porque ficava 1 a mais [na coluna do Total].
Professora: E para o 144?
Marcelo: Já não dá.
Professora: Será que o 141 é o máximo?
Marcelo: Agora sim!

Professora: Porquê?
Marcelo: A partir de 150 já não dá. [Aponta para os valores que obteve]
Professora: Tens a solução com duas opções diferentes. Vamos escrever a resposta?
Marcelo: Aqui? [Aponta para a folha de cálculo]
Professora: Escreve como pensaste, porque fizeste assim as colunas e aquilo que foste fazendo, está bem?
Marcelo: Essa é a pior parte, não sei dizer como é que fiz.
Professora: Então, não sabes? Explica como fizeste. Tu foste experimentando, não foi? Tendo em conta as condições do enunciado, fizeste as quatro colunas, cada uma para…

O que Marcelo apresenta como explicação, tanto na linguagem como nos processos indicados, é revelador da opacidade que o Excel apresenta para este aluno: "Eu resolvi este problema tendo em conta as condições do problema, fazendo 4 colunas, uma para cada filho, e experimentando até achar um número mais alto."

A resolução de Marta (65 minutos)

Marta começa por escrever os títulos "barras de ouro" e depois "1º filho", "2º filho", "3º filho" e "4.º filho" na linha 3. Na coluna C, por baixo do título, escreve os números naturais até 9 e arrasta a sequência até 1000. Depois insere os valores 2 e 1 nas células D4 e E4, respectivamente. De seguida, coloca os valores 4 e 2 em D5 e E5, e os valores 6 e 3 em D6 e E6. Desta forma, cria o início de uma sequência progressiva com incremento, em cada uma das colunas D e E. A seguir, arrasta, propagando as sequências até à célula correspondente ao número 1000 da coluna C. Na célula F4 insere a fórmula "= D4+E4" e, com o cursor ainda na célula, pergunta à professora:

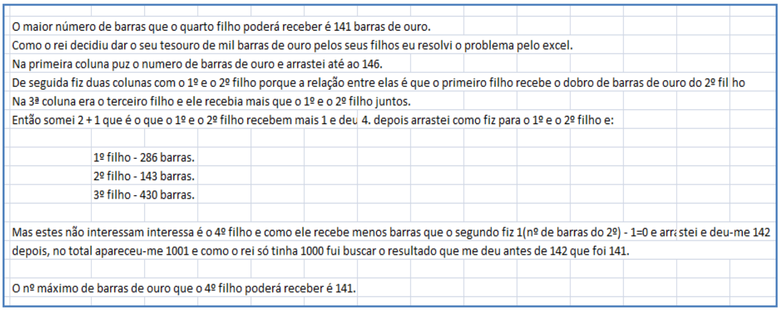
Marta: E agora, professora, faço *enter*?
Professora: O 3.º recebe mais barras do que os dois primeiros juntos… Podes imaginar quantas serão a mais… Mas é preciso perceber que o 4.º… [a professora não termina a frase e fala agora para toda a turma]. Vocês não se esqueçam que nós estamos à procura do número máximo de barras que o 4.º filho pode receber.
Marta volta a chamar a professora e diz:
Marta: O 3.º filho recebe mais do que estes. [Aponta para o 1.º e 2.º filhos e escreve a fórmula "= E4+D4+1"]
Professora: E agora o que é que é preciso fazer?
Marta: Arrasta-se.
Professora: E agora?
Marta: O 4.º filho receberá menos barras do que o 2.º. Então se o 2.º filho recebe 1, tenho que começar com 0.
Professora: E como é que vais pôr ai? Será que podes pôr uma fórmula?
Marta: Sim, este [aponta para a célula E4] menos 1.
A aluna escreve a fórmula e arrasta.
Professora: E agora que vais fazer?
Marta: Somar todos.
A aluna insere na célula H4 a fórmula" = G4+F4+E4+D4" e arrasta-a até a um determinado valor, afirmando:
Marta: Já passa. [Já passava de 1000]
Um colega diz: "A mim dá 1001."

Marta: A mim também me deu 1001.

Marta chama novamente a professora.

Marta: Isto está mal, não está?
Professora: Há um irmão que está a receber uma barra a mais, não é verdade? Qual é que poderá ser?
Marta: Este, o 4.º irmão.
Professora: Sim, então o 4.º irmão em vez de receber…
Marta: ...142, recebe 141.

A aluna assinala a solução, colorindo as células, e explica o seu raciocínio na própria folha de cálculo.


O maior número de barras que o quarto filho poderá receber é 141 barras de ouro.
Como o rei decidiu dar o seu tesouro de mil barras de ouro pelos seus filhos eu resolvi o problema pelo excel.
Na primeira coluna puz o numero de barras de ouro e arrastei até ao 146.
De seguida fiz duas colunas com o 1º e o 2º filho porque a relação entre elas é que o primeiro filho recebe o dobro de barras de ouro do 2º fil ho
Na 3ª coluna era o terceiro filho e ele recebia mais que o 1º e o 2º filho juntos.
Então somei 2 + 1 que é o que o 1º e o 2º filho recebem mais 1 e deu 4. depois arrastei como fiz para o 1º e o 2º filho e:

1º filho - 286 barras.
2º filho - 143 barras.
3º filho - 430 barras.

Mas estes não interessam interessa é o 4º filho e como ele recebe menos barras que o segundo fiz 1(nº de barras do 2º) - 1=0 e arra stei e deu-me 142
depois, no total apareceu-me 1001 e como o rei só tinha 1000 fui buscar o resultado que me deu antes de 142 que foi 141.

O nº máximo de barras de ouro que o 4º filho poderá receber é 141.

Os dados recolhidos durante a resolução de Marta mostram que, quer a sua linguagem, quer as suas acções, estão embebidas pela linguagem e lógica de funcionamento do Excel. A aluna sabe que, seleccionando alguns valores numéricos numa coluna e arrastando o cursor, gera sequências numéricas e que, ao arrastar uma célula com uma fórmula, gera uma “variável-coluna”.

Ao longo da aula Marta solicitou várias vezes a presença da professora mas nem sempre foi possível atendê-la prontamente. Tal facto fez com que Marta estivesse algum tempo à espera da professora para prosseguir a sua resolução. Desta forma se justifica a sua demora na resolução do problema comparativamente com Marco. Este foi um dos primeiros alunos da turma a terminar o problema, pois teve primeiro a participação da professora na discussão do processo de resolução do problema.

Figura 9: Excerto da tabela feita por Marta

C	D	E	F	G	H
barras de ouro	1º filho	2º filho	3º filho	4ºfilho	total
1	2	1	4	0	7
2	4	2	7	1	14
3	6	3	10	2	21
4	8	4	13	3	28
5	10	5	16	4	35
6	12	6	19	5	42
7	14	7	22	6	49
8	16	8	25	7	56
9	18	9	28	8	63
10	20	10	31	9	70
11	22	11	34	10	77
12	24	12	37	11	84
13	26	13	40	12	91
14	28	14	43	13	98

C	D	E	F	G	H
132	264	132	397	131	924
133	266	133	400	132	931
134	268	134	403	133	938
135	270	135	406	134	945
136	272	136	409	135	952
137	274	137	412	136	959
138	276	138	415	137	966
139	278	139	418	138	973
140	280	140	421	139	980
141	282	141	424	140	987
142	284	142	427	141	994
143	286	143	430	142	1001
144	288	144	433	143	1008
145	290	145	436	144	1015
146	292	146	439	145	1022

Figura 10: As fórmulas usadas por Marta na folha de cálculo.

C	D	E	F	G	H
barras de ouro	1º filho	2º filho	3º filho	4ºfilho	total
1	2	1	=E4+D4+1	=E4-1	=G4+F4+E4+D4
2	4	2	=E5+D5+1	=E5-1	=G5+F5+E5+D5
3	6	3	=E6+D6+1	=E6-1	=G6+F6+E6+D6
4	8	4	=E7+D7+1	=E7-1	=G7+F7+E7+D7
5	10	5	=E8+D8+1	=E8-1	=G8+F8+E8+D8
6	12	6	=E9+D9+1	=E9-1	=G9+F9+E9+D9
7	14	7	=E10+D10+1	=E10-1	=G10+F10+E10+D10
8	16	8	=E11+D11+1	=E11-1	=G11+F11+E11+D11
9	18	9	=E12+D12+1	=E12-1	=G12+F12+E12+D12
10	20	10	=E13+D13+1	=E13-1	=G13+F13+E13+D13
11	22	11	=E14+D14+1	=E14-1	=G14+F14+E14+D14
12	24	12	=E15+D15+1	=E15-1	=G15+F15+E15+D15
13	26	13	=E16+D16+1	=E16-1	=G16+F16+E16+D16
14	28	14	=E17+D17+1	=E17-1	=G17+F17+E17+D17

CONCLUSÕES

Este problema, pelo facto de impor uma variedade de condições que se relacionam entre si, por não definir com exactidão o "receber mais" e "receber menos" e, ainda, por pedir o valor máximo, torna-se portador de algumas dificuldades quando se tenta uma resolução puramente algébrica. Pelo contrário, a folha de cálculo parece ajustar-se a estas características, dando a impressão de que o problema se torna mais nítido.

Com efeito, quando analisamos as variadas resoluções feitas no Excel, encontramos um padrão de similitudes, mesmo provindo de alunos em contextos completamente diferentes. Todos eles apresentam uma tabela com uma determinada "arrumação" fomentada pelo Excel. Em todos os casos, surgem quatro colunas correspondentes aos quatro filhos, sendo a coluna do 2.º filho a que fica reservada para a introdução dos valores iniciais (os *inputs*), funcionando como a coluna destinada à variável independente. As restantes colunas são construídas, quer por meio de fórmulas, quer manualmente, através de relações de dependência: a célula do 1.º filho a depender da célula do 2.º, a do 3.º a depender da dos dois anteriores e a do 4.º a depender dos três anteriores e da célula do 2.º.

Há duas grandes estratégias ou abordagens distintas nas resoluções analisadas. Numa delas, prevalece a tentativa-e-erro e as células da coluna destinada ao 2.º filho funcionam como *recipientes* onde se colocam valores para realizar experiências e examinar os *outputs* nas restantes células. Na outra abordagem, a coluna do 2.º filho funciona como uma variável-coluna, ou seja, usa-se o Excel para se percorrer uma sucessão de valores e para se obter os resultados correspondentes nas colunas dependentes. Chamamos à primeira estratégia a "procura do valor da incógnita" e à segunda "a utilização da variável-coluna".

A análise da captura de ecrãs e dos diálogos em sala de aula dá-nos uma grande quantidade de detalhes sobre as acções dos alunos durante a resolução do problema, nomeadamente, no que respeita à sua comunicação matemática quando interagem com a folha de cálculo. É a partir desta análise que podemos associar a comunicação matemática dos alunos à sua forma de utilização da ferramenta computacional. No caso de Marcelo, observamos que a sua linguagem matemática é essencialmente numérica e não há um domínio da linguagem associada à folha de cálculo, o que o leva em muitos momentos a apontar com o dedo para o ecrã quando se quer referir a uma coluna ou uma célula. Para este aluno, o Excel é sobretudo um dispositivo de arrumação da informação e das relações funcionais entre as colunas. De resto, Marcelo limita-se a recorrer ao cálculo mental, não entendendo a sugestão da professora de pôr o Excel "a fazer as contas"). Com este aluno, a professora foi mais insistente, geralmente colocando-lhe questões procurando destapar a opacidade da folha de cálculo que este aluno ainda revelava. No caso de Marta, o contraste é flagrante, a professora não precisou de dar sugestões pois a aluna traduzia rapidamente o seu raciocínio para a linguagem do Excel. As relações de dependência que foi descobrindo iam sendo imediatamente expressas em fórmulas no Excel. A sua linguagem apresenta-se impregnada de palavras que são específicas da linguagem própria da folha de cálculo. Neste sentido, as representações proporcionadas pela ferramenta são nitidamente transparentes para Marta. É de supor que algo de semelhante acontece com David, que enviou a tabela da folha de cálculo e explicou a sua construção, recorrendo a um esquema que usa uma linguagem algébrica e simbólica.

Julgamos, assim, poder afirmar, em consonância com Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008) e Moreno-Armella e Hegedus (2009), que a resolução deste problema algébrico e a comunicação matemática envolvida são fruto de uma "co-acção" do indivíduo e da folha de cálculo. A referida co-acção começa pela necessidade de estruturação das condições do problema *em colunas*, passa pela introdução de dados numéricos e pela análise do feedback imediato *proporcionado pela folha de cálculo*, nas diversas células da tabela, e inclui a *tradução*, em fórmulas ou em números, das relações de dependência entre as variáveis para as células da folha de cálculo. Por fim, o aluno *escolhe* a solução que lhe surge *confirmada* pelos resultados exibidos na folha de cálculo. Até certo ponto, as representações proporcionadas pelo Excel constituem também um meio de verificação da solução do problema.

REFERÊNCIAS

Ainley, J. (1995) Reasons to be formal: contextualising formal notation in a spreadsheet environment. In L. Meira e D. Carraher (Eds.) *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 26-33) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Ainley, J., Bills, L., e Wilson, K. (2004). Construting meanings and utilities within algebraic tasks. In M. J. Høines e A. B. Fuglestad (Eds), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 1-8). Bergen, Norway.

Arzarello, F., e Paola, D. (2008). How to choose the independent variable, *Proceedings of the 32th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Morelia, Mexico.

Boavida, A., Amado, N., e Coelho, V. (2009). A comunicação matemática dos alunos no contexto da resolução de problemas. In J. Fernandes, M. H. Martinho e F. Viseu (Orgs.) *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 354-367). CIEd-IEP, Universidade do Minho, Braga.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Dettori, G., Garuti, R. e Lemut, E. (2001) From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bishop e R. Linz (Eds). *Perspectives on school algebra* (pp. 191-208). Dordrecht: Kluwer.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., e Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.). New York, NY: Routledge.

Haspekian, M. (2003). Instrumental approach to understand the problems of the the spreadsheet integration. In T. Triandafillidis e K. Hatzikiriakou (Eds.). *Proceedings of the 6 th International Conference Technology in Mathematics Teaching* (pp. 118-124) Athens: New Technologies.

Haspekian, M. (2005). An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde e A. Pérez (Eds.), *International Congress on Mathematical Education 8: Selected Lectures* (pp. 271-290). Seville: SAEM Thales.

Lesh, R., Behr, M., e Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. . In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S., e Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 68,* 99-111.

Moreno-Armella, L., e Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM, Mathematics Education*, *41,* 505-519.

Rojano, T., e Sutherland, R. (1997). Pupils' strategies and the Cartesian method for solving problems: the role of spreadsheets. *Proceedings of the 21st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 72-79). Lathi: University of Helsinki.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh e D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 143-161). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Zazkis, R., e Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(3), 164-186.

A resolução de problemas e a comunicação matemática para além da sala de aula: como vêem os alunos o uso das tecnologias?

Nuno Amaral
Escola Básica 2,3 das Naus, Lagos
Susana Carreira
FCT, Universidade do Algarve e CIEFCUL
Nélia Amado
FCT, Universidade do Algarve e CIEFCUL

RESUMO

As recentes alterações curriculares em Matemática, em Portugal como em muitos outros países, têm vindo a atribuir às tecnologias um lugar cada vez mais consistente. As TIC, que hoje são parte integrante da vida quotidiana e começam a ganhar a designação de "ferramentas tecnológicas domésticas" (*Excel*, *Word*, *PowerPoint*, *PDF*, *Paint*, Digitalização de imagem…) – dada a crescente disseminação do computador, da Internet e de outros instrumentos digitais – podem constituir uma oportunidade para o desenvolvimento do pensamento matemático e incentivar a sua aprendizagem (Alves, Palhares e Morais, 2008).

Esta comunicação tem como campo empírico o Campeonato de Matemática Sub12, promovido pela Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade do Algarve. Trata-se de uma competição de resolução de problemas de Matemática, que tem lugar fora da sala de aula, através da *Internet*, e é destinada a alunos dos 5.º e 6.º anos, do Algarve e do Alentejo.

O foco deste trabalho de investigação é o papel desempenhado pelas "tecnologias domésticas", associadas ao computador, na comunicação matemática dos participantes subordinada à resolução de problemas e, ainda, as suas opiniões sobre o modo como encararam esta experiência. Os dados obtidos revelam o valor e a pertinência das tecnologias para resolver e comunicar os processos de resolução, bem como a opinião favorável dos participantes sobre a actividade de resolução de problemas, situada para além da sala de aula e permitindo o livre recurso às tecnologias.

A resolução de problemas, para além de constituir um objectivo primordial da aprendizagem da Matemática, é um meio pelo qual os alunos aprendem ideias matemáticas e desenvolvem diversas capacidades como, por exemplo, a de comunicar matematicamente (NCTM, 2007). As TIC, cuja presença e indispensabilidade é evidente na sociedade actual, lançam novos e crescentes desafios à Matemática escolar. São cada vez mais claros os indicadores de que o uso de ferramentas tecnológicas é vantajoso na exploração e na resolução de problemas, vantagens que mais tarde podem ser transferidas para outras situações de aprendizagem (Amado, 2007). Recorrendo à tecnologia, os alunos aprendem, encontram novas formas de comunicar os seus pensamentos e descobrem caminhos originais para desenvolverem a sua própria actividade matemática (Amado e Carreira, 2008).

A *Internet* e o computador dão acesso a inúmeras fontes de aprendizagem e desafios matemáticos *online*, possibilitando o desenvolvimento de actividades matemáticas para além da sala de aula. Algumas dessas propostas apresentam características capazes de permear a aula de Matemática, alargando-a para lá dos seus limites físicos (Simões, 2002). Assim, a *Internet* e o computador constituem recursos que permitem uma outra relação com a Matemática e incentivam a sua aprendizagem (Alves *et al*., 2008). Por outro lado, revelam-se capazes de influenciar e promover a criatividade dos alunos na resolução de problemas, oferecendo-lhes novas formas para comunicarem o seu pensamento, as suas estratégias e os seus raciocínios (Jacinto, 2008).

O Sub12 é um campeonato de resolução de problemas de Matemática que decorre *on-line*, constituindo um exemplo das múltiplas iniciativas que decorrem em contexto virtual extravasando o espaço escolar tradicional. Entre Janeiro e Junho, período em que decorre a competição, é colocado quinzenalmente um problema *online*, que os alunos resolvem, enviando a sua resposta por e-mail. Os participantes têm liberdade de recorrer a todas as ferramentas tecnológicas ao seu dispor como suporte para apresentar a sua resolução. É-lhes solicitado explicitamente que descrevam o processo, que expliquem o seu raciocínio e mostrem como chegaram à resposta. Por outro lado, recebem *feedback* a cada resposta que enviam, podendo reformular, melhorar ou corrigir a sua proposta de resolução.

Neste contexto temos a possibilidade de observar que uma larga percentagem de alunos participantes faz uma utilização do computador, tirando partido das múltiplas "tecnologias domésticas" que têm ao seu dispor. É a partir desta constatação que se torna pertinente investigar como ocorrem estes usos da tecnologia na forma de representação dos alunos para comunicar e exprimir o raciocínio e as estratégias utilizadas. Assim, neste estudo pretendemos analisar a relevância e as potencialidades das "tecnologias domésticas" (*Excel*, *Word*, *Paint*, Digitalização, etc.), proporcionadas pelo computador, na resolução dos problemas propostos no Sub12, dando uma atenção particular às formas de comunicação e representação do pensamento matemático. Procuramos, ainda, conhecer o modo como os participantes encaram o recurso às ferramentas tecnológicas, através de um questionário aplicado *online*.

OS AMBIENTES VIRTUAIS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Actualmente, a tecnologia digital é parte integrante da vida das crianças e jovens e, como consequência, é considerado plausível que estes pensem e processem a informação de forma diferente dos seus antecessores (Prensky, 2006). Esta realidade permite designar os estudantes de hoje de Nativos

Digitais, indivíduos que falam uma nova linguagem – em grande parte, a linguagem dos computadores, dos jogos de vídeo e da *Internet*.

As tecnologias proporcionam novas formas de comunicar e, em muitos aspectos, estão a alterar profundamente o processo e a natureza da comunicação. Deste modo, o processo de transmissão e aquisição de informação pode realizar-se de várias formas e em diferentes lugares, possibilitando aprendizagens eficientes fora da sala de aula (Kenderov, Rejali, Bussi, Pandeliev, Richter, Maschieto, Kadijevich e Taylor, 2009). Em particular, surgem cada vez mais oportunidades para envolver os estudantes no mundo da Matemática e há uma nova liberdade para aprender (Freiman, Kadijevich, Kuntz, Pozdniakov e Stedoy, 2009).

Os campeonatos de resolução de problemas *online* são actividades extra-curriculares que pretendem desenvolver e aprofundar o conhecimento matemático. Losada, Yeap, Gjone e Pourkazemi (2009) referem que as competições matemáticas realizadas fora da escola, desde que desafiantes, interessantes e divertidas, podem ser úteis para a aprendizagem de ideias matemáticas e para o desenvolvimento do pensamento matemático. Nestes ambientes virtuais, os alunos têm ao seu dispor problemas adequados às suas aprendizagens, podendo resolvê-los ao seu próprio ritmo, através de estratégias pessoais e com possibilidade de escolher a ferramenta tecnológica que preferem para comunicar as suas resoluções de forma eficaz (Freiman *et al*, 2009). Para Barbeau e Taylor (2009), a facilidade de comunicação possibilitada pela tecnologia permite originar ambientes realistas e desejáveis para introduzir desafios matemáticos. Também Rolo e Afonso (2005) consideram que as aplicações disponibilizadas pela tecnologia promovem grandes oportunidades de aprendizagem e que a sua utilização pode ser estimulada pela participação dos indivíduos em actividades de resolução de problemas *online*. As "tecnologias domésticas" e o acesso à *Internet* podem, portanto, tornar-se muito significativos como componentes de uma educação matemática de qualidade (Jacinto e Carreira, 2008). Para Amado, Amaral e Carreira (2009), são o tipo de ferramentas que mostram poder influenciar a criatividade, a expressividade e a riqueza das resoluções dos alunos em problemas matemáticos.

A *Internet* torna possíveis espaços virtuais de resolução de problemas, onde os alunos podem aprender de forma individual e independente ou de forma colectiva e colaborativa, propondo e partilhando estratégias, resoluções e raciocínios (Jacinto, 2008). Nesta perspectiva, a *Internet* é susceptível de fomentar uma aprendizagem mais autónoma e promover a criatividade e a capacidade de inovação que se anseiam na sala de aula (Jacinto, 2008; Carrilho e Cabrita, 2008).

O computador é o principal motivo pelo qual se tem relativizado a grande ênfase outrora colocada no domínio do cálculo e da manipulação algébrica, tornando-os secundários relativamente a competências de ordem superior, como a resolução de problemas, a capacidade de raciocínio e a comunicação matemática. Ao mesmo tempo, o uso das tecnologias digitais reforça o papel da linguagem gráfica, introduz novas formas de representação e permite novas estratégias de abordagem a problemas (Matos e Serrazina, 1996). A utilização das "ferramentas domésticas" disponibilizadas pelo computador (*Word*, *Excel*, *Paint*, *PowerPoint*, manipulação de imagem, etc.) muda a natureza das actividades matemáticas, tornando-as mais experimentais e, ao mesmo tempo, facilita a validação de conjecturas (Jacinto, 2008). Os campeonatos *online* de resolução de problemas surgem como potenciais meios de perseguir finalidades expressas no currículo escolar (Jacinto, 2008), entre as quais se pode apontar o desenvolvimento da comunicação matemática.

AS TECNOLOGIAS COMO FERRAMENTAS POTENCIADORAS DA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

Actualmente, a comunicação matemática é considerada uma capacidade a ser desenvolvida por todos os alunos, assumindo-se como um objectivo curricular importante (Boavida, Silva e Fonseca, 2009).

A comunicação constitui parte integrante da construção e compreensão das ideias matemáticas (Freiman *et al*, 2009). É um elemento essencial da Matemática e um meio fundamental para ajudar os alunos a articularem, clarificarem, organizarem e consolidarem o raciocínio, contribuindo para o desenvolvimento do seu pensamento matemático (Fonseca, 2009; NCTM, 2007; Boavida *et al*, 2008). Quando os alunos têm oportunidade de comunicar sobre a sua actividade matemática, exercitam competências e processos de pensamento cruciais para o desenvolvimento da literacia matemática (Freiman *et al*, 2009). Segundo Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins e Oliveira (2007), a comunicação matemática acciona a aquisição e o uso da terminologia e simbologia próprias da Matemática.

O cuidado e a precisão presentes na linguagem matemática dependem da riqueza das experiências de comunicação vividas. Os alunos, ao comunicarem, por escrito ou oralmente, os seus raciocínios, tendem a tornar-se mais organizados e claros, de modo a que as suas ideias e representações sejam compreendidas pelos outros (Fonseca, 2009). Através da comunicação, podem encontrar oportunidades para detectar pensamentos errados ou inadequados, podendo alterá-los, refiná-los e aprofundá-los. O Campeonato de Matemática Sub12 oferece tais oportunidades, incentivando os participantes a melhorar e a apurar os seus produtos.

Para desenvolver a capacidade de comunicar matematicamente, é preciso criar ambientes que envolvam participação e onde a comunicação seja explicitamente tratada e estimulada (Fonseca, 2009). Para Duarte (2008), a criação de oportunidades de comunicação é essencial na actividade matemática dos alunos. A valorização da comunicação matemática, a existência de momentos ricos no plano comunicativo, em torno de ideias significativas, contribui para a apropriação de outras dimensões da Matemática, que vão para além dos números, regras e procedimentos mecanizados (Boavida *et al*., 2008).

Muitos dos jovens que estão hoje na escola expressam-se através de imagens e são capazes de comunicar, juntando imagem e texto de uma forma natural (Oblinger e Oblinger, 2005). São indivíduos cada vez mais criativos e sofisticados, consumidores constantes de tecnologia, usando-a intensivamente para comunicarem uns com os outros (Bull, 2009). Esta é uma das razões pelas quais as actividades promotoras da comunicação matemática devem ser autênticas e fazer sentido para os estudantes, e as TIC podem desempenhar aqui um papel muito importante (Freiman *et al*, 2009). São ferramentas que ajudam os alunos a construir a sua própria compreensão, beneficiando a interactividade e a experimentação e permitindo-lhes comunicar mais facilmente o seu pensamento matemático (Moyer, Niezgoda e Stanley, 2005). Favorecem uma comunicação multimodal, que combina imagens, texto, símbolos, ícones e manipulação de dados, de modo diferente do quadro preto tradicional ou do simples papel e lápis (Borba, 2009). Possibilitam a comunicação síncrona e assíncrona, estimulando as interacções entre professores e alunos, constituindo uma ferramenta de grande utilidade para o trabalho colaborativo (Ponte, Oliveira, e Varandas, 2003).

A resolução de problemas com recurso às tecnologias poderá dar uma contribuição positiva para melhorar a comunicação matemática dos alunos (Torres, 2008). As tecnologias oferecem novas oportunidades e desafios para trabalhar com múltiplas formas de representação matemática (NCTM, 2007).

METODOLOGIA

O Campeonato de Matemática Sub12 destinado a alunos dos 5.º e 6.º anos (www.fct.ualg.pt/matematica/5estrelas), inclui duas fases distintas: a *fase de apuramento*, que é constituída por 12 problemas e decorre à distância e a *fase final*, na qual os alunos finalistas participam num torneio presencial constituído por 5 problemas.

Na primeira fase (a mais importante para este estudo) os problemas são colocados quinzenalmente *online*, entre Janeiro e Junho, na página do Campeonato. Os alunos respondem por e-mail, podendo utilizar uma janela de resposta disponível, que permite enviar a resolução no corpo da mensagem ou através de um ficheiro em anexo.

A fase de apuramento desenrola-se integralmente no mundo virtual, chega aos concorrentes através da *Internet*, sendo feita a publicação de toda a informação relativa ao Campeonato num *website*, o que se traduz numa comunicação unilateral e massificada. Por outro lado, a utilização do e-mail promove uma comunicação bilateral e individualizada, sob a forma de *feedback* a cada concorrente sobre a sua resolução.

Os participantes dispõem de quinze dias para apresentar as suas resoluções, durante os quais podem resolver os problemas ao seu próprio ritmo, a qualquer hora e em qualquer lugar, podendo contar com a ajuda dos pais e familiares, dos colegas e do próprio professor de Matemática. Se a resolução do problema estiver totalmente correcta os alunos são felicitados e incentivados a continuar. No caso de darem uma resposta incompleta ou incorrecta, recebem um *feedback* adequado, que os leve a corrigir, completar ou melhorar as resoluções.

Na fase de apuramento, o Sub 12 regista uma participação de mais de 1200 alunos que ao longo da competição vai diminuindo por sucessiva eliminação dos concorrentes e por abandono da competição. À fase final chegam habitualmente cerca de 15% dos participantes iniciais. Este valor corresponde ao número de alunos que se mantêm em prova até ao final do Campeonato.

Neste estudo adoptamos uma metodologia essencialmente qualitativa, pelo que os dados são descritivos e a fonte directa é o ambiente natural em que se produzem (Bogdan e Biklen, 1994). Trata-se de uma opção metodológica que vai ao encontro para necessidade de compreender as razões e motivações dos jovens para o uso das "ferramentas domésticas" e a forma como este uso se traduz na materialização dos processos e dos raciocínios matemáticos apresentados.

Os dados analisados provêm de duas fontes distintas:

1- Resoluções dos problemas de três jornadas (enviadas pelos concorrentes por e-mail), seleccionadas em função da riqueza das representações e diversidade de "tecnologias domésticas" utilizadas.

2- Aplicação de um questionário aos 200 participantes que ainda se encontravam em prova, no momento em que tinha decorrido mais de dois terços da fase de apuramento. Ao questionário, que foi enviado e respondido por e-mail, responderam 42 alunos. Pretendeu-se saber, com este instrumento, de que forma os participantes encaram a utilização das tecnologias para resolver problemas e o que pensam sobre esta actividade através da *Internet*.

A análise dos dados é, primordialmente, descritiva e interpretativa, tendo em vista perceber a relevância das tecnologias digitais no tipo de comunicação matemática evidenciado pelos alunos e a sua opinião acerca da utilidade destas ferramentas. Relativamente às resoluções dos três problemas apresentados foram identificados casos em que surgiram tabelas, esquemas, representações pictóricas e simbólicas e a utilização de cores, viabilizados pelo uso de alguma das aplicações informáticas disponíveis no computador. Estas situações foram interpretadas procurando estabelecer uma consonância entre a resolução do problema e a forma de representação produzida pelo aluno.

O questionário aplicado era constituído por 6 questões abertas focadas na utilização de programas informáticos no ambiente escolar e no Campeonato de Matemática e nas opiniões dos alunos acerca da utilidade que atribuem a estas ferramentas. As respostas foram agrupadas, recorrendo a categorias definidas *a posteriori*, que permitiram um tratamento quantitativo da informação. Neste sentido os resultados do questionário oferecem uma panorâmica sobre a forma como os alunos percepcionaram o recurso às tecnologias.

COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DO SUB12

Vários participantes optaram por enviar as suas resoluções em ficheiro anexo, utilizando as "tecnologias domésticas", talvez pelo facto destas ferramentas permitirem maior liberdade e criatividade na comunicação das estratégias e dos raciocínios usados.

Grande parte das resoluções foi enviada em *Word*. Apenas um reduzido número de participantes recorreu ao *Excel*, ao *PowerPoint*, ao *Paint* ou à digitalização de documentos, nomeadamente de fotografias ou resoluções feitas em papel e lápis. O *Word* foi essencialmente utilizado para a organização de informação através de esquemas, tabelas, caixas de texto, imagens retiradas ou construídas através da aplicação *Formas Automáticas.*

Na figura 1, podemos observar três resoluções ao problema da "Mão-cheia de canetas". A diversidade de recursos oferecidos pelas tecnologias permite evidenciar vários aspectos da actividade matemática envolvida. De entre estes aspectos, destacamos a capacidade de organização e esquematização do raciocínio matemático, através da *construção de tabelas*, da utilização de *destaques permitidos pelo uso das cores*, e de *quadros para sistematizar dados* e exibir *ideias matemáticas*, de uma forma clara e original. As representações patentes nestas respostas são parte integrante da construção das resoluções pelos alunos e, portanto, conferem significado à sua actividade matemática. Elas constituem uma lente poderosa para apreciar e compreender a estratégia que foi seguida pelos participantes. Em cada uma das respostas, é visível o alargamento do espaço de criatividade na construção e comunicação das resoluções.

O modo como as condições do problema são expressas pelos alunos resulta em formas de linguagem e em representações específicas: "a Patrícia tem sempre 6 canetas" (uma coluna constante, repetição do número 6 em todas as hipóteses); "a Teresa pode ter 2 até 5 canetas" (uma coluna com os números inteiros consecutivos de 2 a 5, uma parcela variável que toma os valores de 2 a 5), "as raparigas podem ter..." (as várias soluções na coluna dos totais, as várias somas encontradas).

Na figura 2, apresentamos três resoluções do problema "Uma escada de cubos". O elemento visual é aqui um dos aspectos mais relevantes. Os alunos mostram claramente a importância que assume no seu raciocínio, uma figura representativa dos degraus da escada. A construção dessa imagem adquire diferentes funções. Em certos casos, é o trampolim para o desenvolvimento de uma estratégia de adição dos múltiplos de 2; noutros, serve o objectivo da contagem exaustiva, que deixa a descoberto padrões numéricos interessantes e informativos. Neste sentido, o recurso ao computador revela dois aspectos poderosos – por um lado, é um meio de tornar a comunicação eficiente e, por outro, acentua o poder da visualização na actividade matemática dos alunos.

Frequentemente, num mesmo problema, diferentes alunos fazem uso de várias ferramentas tecnológicas. No problema do “Drama da Olívia Palito” (figura 3), as ferramentas utilizadas parecem estar em sintonia com modos distintos de raciocinar, ora mais numéricos ora mais esquemáticos. Há alunos que pensam nos múltiplos de 15 e 20, mas outros analisam o comportamento das sequências, sem necessitar de recorrer ao conhecimento do mínimo múltiplo comum entre dois números. Nas quatro resoluções apresentadas, verificamos que alguns alunos tiram partido das potencialidades gráficas do computador, evidenciando o carácter periódico da duração de cada uma das viagens. A regularidade, a repetição e a exibição de um padrão estão bem presentes nos esquemas e nas legendas utilizados. Não apenas os alunos exibem a compreensão das sequências envolvidas no problema, mas sublinham a natureza cíclica da situação. Para além dos padrões numéricos, trata-se de pensar e de comunicar em termos esquemáticos, o que implica uma percepção concreta da noção de ciclos com períodos distintos e da existência de momentos de coincidência.

Em todo o caso, também os padrões numéricos são alvo de atenção por parte de muitos dos participantes. O recurso a tabelas, com duas colunas, uma para o número de viagens e outra para o número de dias passados no mar, é revelador da ideia de correspondência entre a ordem e o termo de uma sequência. O ponto de vista dos alunos consiste em tornar visível a existência de termos iguais nas duas sequências e obter o menor valor que aparece simultaneamente em ambas.

Vários participantes optaram pelo *Excel* para darem a perceber as suas resoluções ao problema da Olívia Palito, embora o tenham usado apenas para organizar a informação em células da folha de cálculo. É claro que o *Excel* tem toda a pertinência para tratar este problema pois permite gerar facilmente sequências numéricas por meio de fórmulas. Percebe-se, porém, que a maioria dos jovens que utilizou o *Excel* o fez sem tirar partido das suas potencialidades na construção de sequências numéricas, com base em fórmulas. São poucos os que revelam saber usar a introdução de fórmulas, o que pode evidenciar um domínio reduzido desta ferramenta ou uma experiência ainda limitada com a mesma.

A liberdade de comunicação dada aos participantes na resolução dos problemas, bem como a forma como eles a sentem e exprimem, reflectiu-se no desenvolvimento da criatividade (Pereira, 2006). A utilização das "tecnologias domésticas" evidencia capacidades e competências, matemáticas e tecnológicas, dos participantes na resolução dos problemas (Jacinto e Carreira, 2008). Desta forma, a comunicação matemática foi relevada para primeiro plano, orbitando em redor de formas específicas e eficazes de representação de ideias, conceitos e processos matemáticos.

Figura 1. Resoluções dos participantes – a diversidade de recursos utilizados

Uma mão-cheia de canetas

A Patrícia tem 6 canetas. A sua irmã, Teresa, tem menos canetas do que ela mas tem mais do que uma. E a Vanessa, que é prima de ambas, tem tantas canetas como as suas primas juntas. E a Xana, que é da turma da Vanessa, tem mais uma caneta do que a Vanessa. Quantas canetas podem ter, no total, as quatro raparigas?

Resoluções:

Para resolver o problema, fiz estes processos:

- A Patrícia tem *6 canetas*
- A Teresa tem menos canetas que a Patrícia mas tem mais do que uma logo a Teresa pode ter *2 / 3 / 4 / 5 canetas*
- A Vanessa tem tantas canetas quanto as da Teresa e da Patrícia juntas, ou seja, a Vanessa pode ter *8 / 9 / 10 / 11 canetas*

Patrícia	Teresa	Vanessa
6	2	8
6	3	9
6	4	10
6	5	11

- A Xana tem mais uma caneta que a Vanessa logo, pode ter *9 / 10 / 11 / 12 canetas.*

Vanessa	Xana
8	9
9	10
10	11
11	12

- Contabilizando todas as hipóteses, todas juntas, as raparigas podem ter:

Patrícia	Teresa	Vanessa	Xana	Total
6	2	8	9	**25**
6	3	9	10	**28**
6	4	10	11	**31**
6	5	11	12	**34**

Resposta: Tendo em conta todas as hipóteses, chego à conclusão que no conjunto as raparigas podem ter 25, 28, 31 ou 34 canetas.

1ª hipótese – 6+2+8+9 = 25 canetas	Azul = Canetas da Patrícia.
2ª hipótese – 6+3+9+10 = 28 canetas	Vermelho = Canetas da Teresa.
3ª hipótese – 6+4+10+11 = 31 canetas	Verde = Canetas da Vanessa.
4ª hipótese – 6+5+11+12 = 34 canetas	Cinzento = Canetas da Xana.

Resposta: A quatro raparigas podem ter 25, 28, 31 ou 34 canetas. A Patrícia tem sempre 6 canetas. A Teresa é que pode ter 2 canetas até 5 canetas. Consoante o número de canetas da Teresa, o número de canetas da Vanessa e da Xana varia. Tendo sempre a Xana mais uma do que a Vanessa.

Figura 2. Resoluções dos participantes – a importância da utilização de esquemas visuais

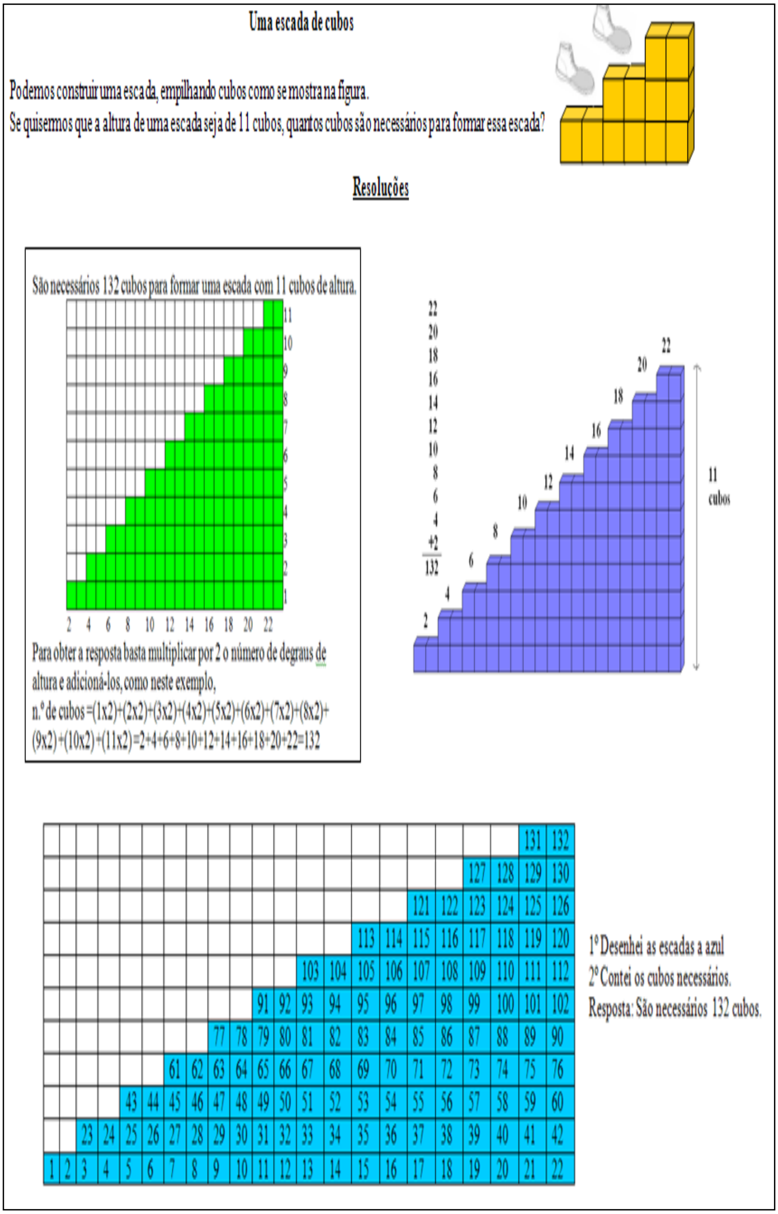
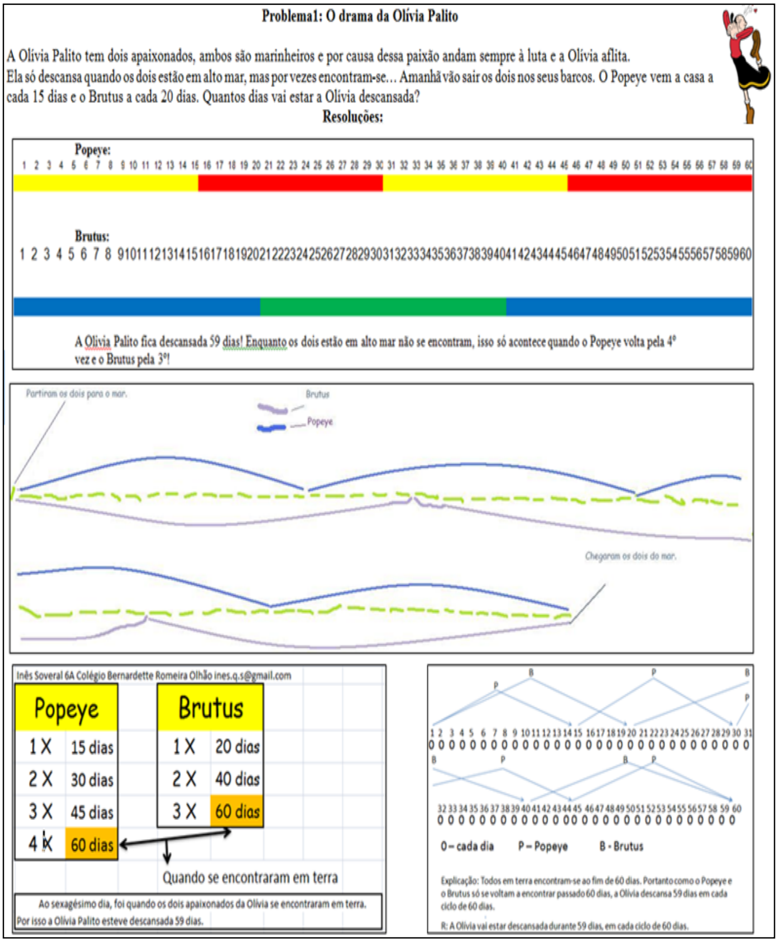


Figura 3. Resoluções dos participantes – diferentes ferramentas para diferentes estratégias

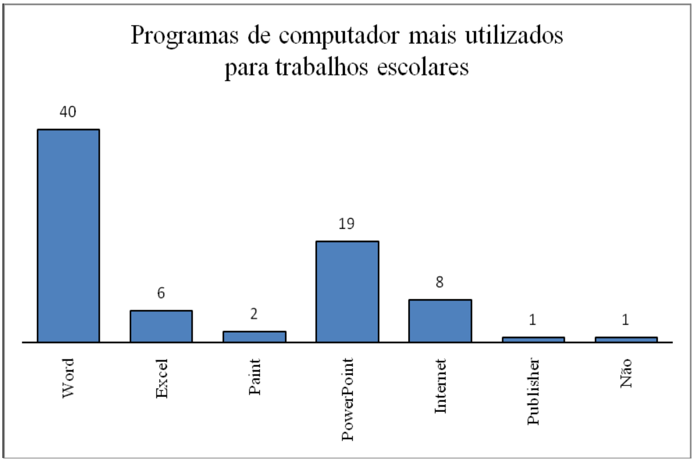


O uso das ferramentas tecnológicas pelos participantes do Sub12

No sentido de conhecer as opiniões dos participantes sobre o recurso às tecnologias na resolução de problemas, foi aplicado um pequeno questionário anónimo, ao qual responderam 42 participantes.

O gráfico 1 revela que o programa de computador mais utilizado pelos participantes para a realização de trabalhos escolares é o *Word*, seguindo-se o *PowerPoint*. Apenas um participante referiu nunca utilizar o computador. A discrepância que se verifica entre o número de respondentes e a soma dos valores do gráfico justifica-se pelo facto de vários participantes terem indicado mais do que uma ferramenta tecnológica.

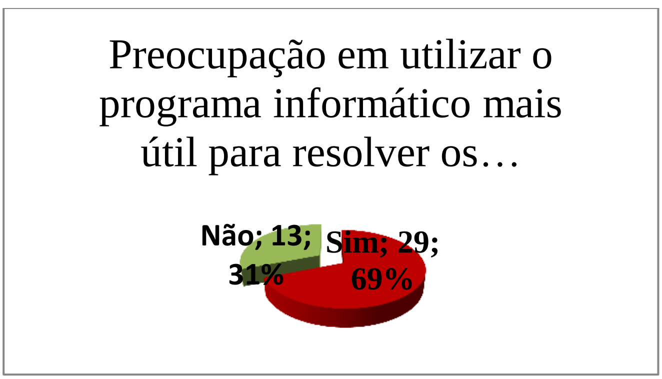
Gráfico 1. Os programas mais utilizados nos trabalhos escolares



A maioria dos participantes refere procurar o programa informático que acha mais útil para a resolução dos problemas (gráfico 2), sendo este resultado consistente com aquilo que foi obtido no estudo de Jacinto (2008). De acordo com alguns concorrentes, a ideia de uma ferramenta mais adequada é veiculada por algumas das seguintes frases: "depende do problema e do que eu precisar de utilizar"; "procuro utilizar algo que me possa facilitar os diferentes passos de resolução"; "dependendo do tipo de problema, uso diferentes programas".

Parece evidente que a selecção dos programas está de acordo com a facilidade de manuseamento e com a situação problemática em causa, de forma a tornar as resoluções mais acessíveis e compreensíveis. Apenas cerca de um terço dos respondentes não se preocupa em escolher o programa mais útil.

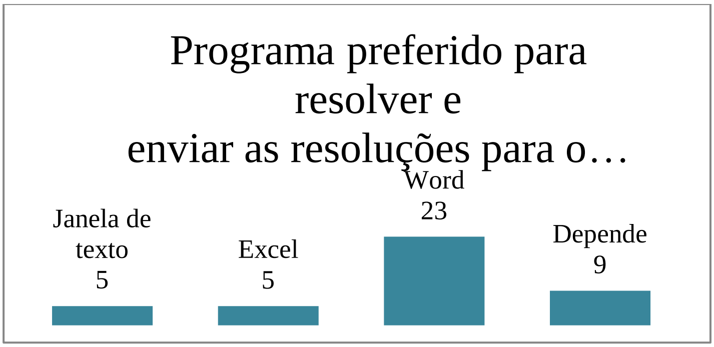
Gráfico 2. Preocupação em utilizar a ferramenta mais útil



Analisando o gráfico 3, verifica-se que, embora exista a noção de que um programa pode ser mais adequado do que outro, a preferência da maioria recai sobre o *Word*, sendo este considerado o mais prático e mais simples. Um dos participantes foi mais longe e referiu que:

"o meu programa preferido para enviar as respostas é o *Word*, pois é o programa, dos que utilizo mais frequentemente, com mais funcionalidades necessárias para a justificação da resposta, embora utilize para enviar a resposta outros programas auxiliares, nomeadamente o *Paint* e o *Sketchpad*".

Gráfico 3. Preferência dos alunos pelo uso de uma ferramenta

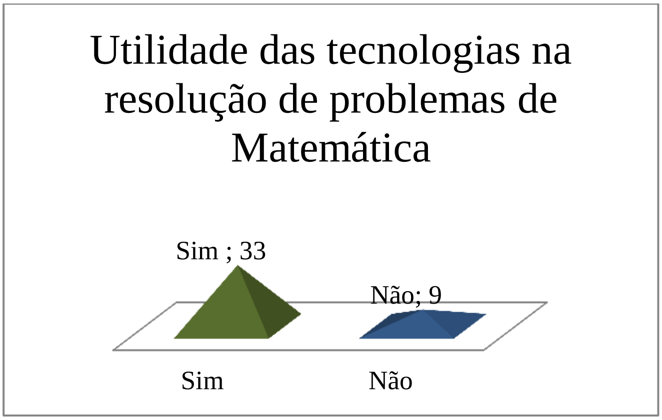


Os que preferem o *Excel* afirmam ser "por causa das tabelas, gráficos e grelhas". Finalmente, há os que afirmam não terem "nenhum preferido, porque depende do que é pedido no enunciado".

No geral, os participantes têm uma opinião favorável sobre a resolução de problemas de Matemática através da *Internet*, apontando várias razões. Para uns, permite-lhes resolver os problemas ao próprio ritmo: "é prático e posso pensar com calma na resolução dos problemas"; "é mais divertido e posso ir resolvendo aos poucos, guardando as minhas ideias até ter solução para enviar". Para outros, "é útil porque não tínhamos tantas opções para resolver os problemas se não fosse no computador". Apenas dois dos inquiridos responderam não ter "nenhuma" opinião ou ser-lhes "indiferente" resolver problemas de Matemática através da *Internet*.

Finalmente, a maioria dos participantes considera útil a utilização das tecnologias na resolução de problemas de Matemática (gráfico 4), por várias razões: "porque ajuda à resolução do problema" e "facilita as respostas"; "porque assim melhoramos as nossas técnicas na utilização das tecnologias e na resolução de problemas de Matemática"; "porque estimula o gosto pela Matemática."; "porque acho que é mais divertido trabalhar num computador"; "porque ajuda na rigorosidade do meu trabalho tornando-se assim mais fácil."; "porque sem ela não tínhamos tantas opções para nos explicarmos melhor… Por exemplo: quando não me consigo explicar bem naquilo que pretendo, utilizo tabelas".

Gráfico 4. Utilidade das TIC



Apenas nove participantes não consideram a tecnologia útil, apontando vários motivos: "penso que a nossa cabeça é a melhor ferramenta"; "porque também podemos fazer no caderno"; "não uso programas de computador (uso lápis e papel e penso) para resolver os problemas".

CONCLUSÕES

Resolver problemas com recurso às tecnologias favorece os participantes nas formas de comunicarem as suas resoluções, contribui para a riqueza das representações e para o desenvolvimento da criatividade.

O uso das tecnologias com um propósito comunicativo, leva os participantes a desenvolverem a sua própria compreensão dos problemas (Jacinto, 2008). Parece evidente que as tecnologias usadas têm valor pedagógico na resolução de problemas de Matemática, exibindo o desenvolvimento de competências tecnológicas, associadas à inovação e à criatividade e não apenas à utilização trivial das tecnologias.

A variedade de "tecnologias domésticas" disponibilizadas pelo computador, permitiram recorrer a formas visuais como o desenho, as cores, os esquemas, as tabelas e as células da folha de cálculo para comunicar cada raciocínio matemático (Amado, Amaral e Carreira, 2009). Tirando partido destas ferramentas, os participantes têm a possibilidade de fazer Matemática para além da sala de aula, trabalhar ao seu próprio ritmo, aprender fazendo e ter experiências que lhes proporcionam uma perspectiva mais ampla da Matemática, ao mesmo tempo que desenvolvem a capacidade de comunicar.

Da análise dos dados apresentados, podemos considerar que são claras as potencialidades das "tecnologias domésticas", na organização da informação, nos modos de representação do raciocínio matemático, na expressão das abordagens escolhidas pelos alunos, nomeadamente as que denotam um grande apelo à visualização, através de esquemas ou desenhos. As tecnologias utilizadas cumprem um papel que lhes é atribuído pelos próprios participantes: comunicar as ideias e as estratégias utilizadas nas resoluções dos problemas, de forma clara e eficaz.

Por fim, nota-se a forma como os participantes valorizam a utilização das tecnologias na resolução de problemas, como têm consciência da diversidade de ferramentas disponíveis e da respectiva utilidade. Também reconhecem a importância que a *Internet* demonstra possuir, como um meio disponível para aprender e fazer Matemática, para além da escola e de uma forma muitas vezes diferente. De facto, grande parte destes concorrentes possuem características que nos permitem designá-los de "nativos digitais" (Prensky, 2006) e a sua apetência pelas tecnologias e o ímpeto comunicacional que nelas encontram representa um novo fôlego para a aprendizagem da Matemática, com especial relevância para o desenvolvimento da comunicação.

REFERÊNCIAS

Alves, C., Palhares, P. e Morais, C. (2008). Contributos da Internet na resolução de problemas. In A. P. Canavarro, D. Moreira e M. I. Rocha (Orgs.). *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 471-481). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Amado, N. (2007). *O professor estagiário de matemática e a integração das tecnologias na sala de aula – Relações de mentoring numa constelação de práticas.* (Tese de Doutoramento, Colecção Teses). Lisboa: APM.

Amado, N., Amaral, N. e Carreira, S. (2009). A liberdade que as tecnologias permitem: trabalhando os números e as capacidades matemáticas transversais. In C. Costa, E. Mamede e F. Guimarães (Orgs). *Números e Estatística: reflectindo no presente, perspectivado o futuro* (CD-ROM, ISBN: 978-972-8614-12-6). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Amado, N. e Carreira, S. (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de matemática – Diferenças na prática na sala de aula. In A. P. Canavarro, D. Moreira e M. I. Rocha (Orgs.). *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 286-299). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Barbeau, E. J. e Taylor, P. J. (2009). Concluding Remarks. In E. J. Barbeau e P. J. Taylor (Eds), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom – The 16th ICMI Study* (pp. 317-318). New York, NY: Springer.

Boavida, A., Silva, M. e Fonseca. P. (2009). Pequenos investigadores matemáticos: Do pensamento à comunicação e da comunicação ao pensamento. *Educação e Matemática*, N.º 102, 2-10.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I. e Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação – uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Borba, M. e Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Experimentation and Visualization.* New York, USA: Springer.

Borba, M. (2009). Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, Vol. 41(4), p. 453-465.

Bull, G. (2009). Tutor, tool, and tutee: A vision revisited. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(2), 89-94.

Carmo, H. e Ferreira, M. M. (1998). *Metodologia da investigação – Guia para a Auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Carrilho, C. e Cabrita, I. (2008). A matemática em ambiente virtual – potencialidades dos blogues. In A. P. Canavarro, D. Moreira e M. I. Rocha (Orgs.). *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 417-431). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Duarte, J., Portela, J. e Torres, J. (2008). A Internet no ensino e aprendizagem da matemática. In A. P. Canavarro, D. Moreira e M. I. Rocha (Orgs.). *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 369-378). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Fonseca, L. (2009). Comunicação na sala d aula. Episódios do 1.º ciclo do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, N.º 103, 2-6.

Freiman, V., Kadijevich, D., Kuntz, G., Pozdniakov, S. e Stedoy, I. (2009). Technological environments beyond the classroom. In E. J. Barbeau e P. J. Taylor (Eds), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom – The 16th ICMI Study* (pp. 97-131). New York, NY: Springer.

Jacinto, H. (2008). *A Internet e a actividade matemática no caso do Sub14*. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Católica Portuguesa, Lisboa.

Jacinto, H. e Carreira, S. (2008). "Assunto: resposta ao problema do Sub14." A Internet e a resolução de problemas em torno da competência matemática dos jovens. In A. P. Canavarro, D. Moreira e M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 434-446). SEM SPCE.

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschieto, M., Kadijevich, D. e Taylor, P. (2009). Challenges Beyond the Classroom: Sources and Organizational Issues. In E. J. Barbeau e P. J. Taylor (Eds), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom – The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). New York, NY: Springer.

Losada, M., Yeap, B., Gjone, G. e Pourkazemi, M. (2009). Curriculum and Assessment that Provide Challenge in Mathematics. In E. J. Barbeau e P. J. Taylor (Eds), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom – The 16th ICMI Study* (pp. 285-315). New York, NY: Springer

Matos, J. M. e Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Mat*emática. Lisboa: Universidade Aberta.

Moyer, P., Niezgoda, D. e Stanley, J. (2005). Young Children's Use of Virtual Manipulatives and Other Forms of Mathematical Representations. In W. J. Masalski e P. C. Elliot (Eds.), *Technology-supported mathematics learning environments: Sixty-seventh yearbook* (pp. 17-34). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escola*r. Lisboa: APM.

Oblinger, D. e Oblinger, J. (2005). Is It Age or IT: First Steps Toward Understanding the Net Generation. In D. G. Oblinger e J. L. Oblinger (Eds.), *Educating the Net Generation*. New York, Educase.

Pereira, M. (2006). A Integração de investigações matemáticas no ensino-aprendizagem das sucessões. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação dos professore*s, (pp. 213-238). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Prensky, M. (2006). *Don´t Bother me Mom, I´m Learning: how computer and video games are preparing your kids for 21st century success and how can help!* St. Paul: Paragon House.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G. e Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. DGIDC, Ministério da Educação, Lisboa.

Ponte, J., Oliveira, H. e Varandas, J. (2003). O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In D. Fiorentini (Ed.), *Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares*, (pp. 159-192). Campinas: Mercado de Letras. (Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm).

Torres, J. (2008). Quadros Interactivos [QI]. A última tecnologia a chegar à escola. *Educação e Matemática*, N.º 97, 42-43.

Rolo, C. e Afonso, P. (2005). A utilização pedagógica da Internet por parte dos professores de Matemática do 2.º e 3.º ciclos do distrito de Castelo Branco. Em J. Brocardo, F. Mendes e A. M. Boavida (Orgs.). *Actas do XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 591-603). Lisboa: APM.

Simões, M. (2002). *Internet na Aula de Matemática: Um estudo de caso*. (Tese de Mestrado, Colecção Teses). Lisboa: APM.

A comunicação de ideias matemáticas no início da Telescola — linguagem, representações e práticas curriculares

José Manuel Matos
Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNL
Mária Cristina Almeida
Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento

Pretende-se conhecer os modos como a comunicação de ideias matemáticas foi levada a cabo na implementação da Telescola em Portugal durante o ano de 1965/66 e que, para além do uso educativo da televisão, incorpora também a inovação curricular da Matemática Moderna. Será estudada em particular a nova linguagem da matemática escolar veiculada televisivamente, bem como as diferenças na comunicação matemática exibidas na construção curricular. O estudo baseia-se numa análise de conteúdo dos guiões publicados no *Boletim IMAVE* complementados com entrevistas ao responsável das aulas televisionadas.

No início dos anos sessenta do século passado, a Educação era encarada em Portugal, social e politicamente, como um factor impulsionador do desenvolvimento económico por alguns sectores (Teodoro, 1999). A evolução da sociedade portuguesa relativamente à estrutura social e alterações no mercado de trabalho que obrigavam a uma melhor qualificação da população activa levou a uma crescente procura de educação no nível seguinte ao primário, designada por expansão escolar. A expansão escolar acentuou carências já existentes, nomeadamente a insuficiência de professores habilitados e a falta de estabelecimentos de ensino. Estando convicto de que os meios audiovisuais teriam um papel cada vez mais importante a desempenhar na realização do conceito de educação permanente, bem como na valorização e difusão do ensino, o Ministro da Educação Nacional, Inocêncio Galvão Telles, procede a partir de 1964 a uma inovação no plano pedagógico: a utilização da televisão para fins escolares e educativos.

Esta comunicação reflecte sobre os modos como a comunicação de ideias matemáticas foi levada a cabo na implementação da Telescola em Portugal durante o ano de 1965/66 e que, para além do uso educativo da televisão, incorpora também a inovação curricular da Matemática Moderna. Será estudada em particular a nova linguagem da matemática escolar veiculada televisivamente, bem como as diferenças na comunicação matemática exibidas na construção curricular. Este trabalho insere-se num estudo histórico comparativo da cultura de matemática escolar em Portugal e no

Brasil durante a implementação da Matemática Moderna[15]. Esta implementação, que na Telescola se iniciou em 1965, constituiu a primeira generalização de um programa de Matemática Moderna dedicado a ciclos pós-primário. Incidir-se-á sobre o primeiro ano de funcionamento (1965/66) e será realizada uma análise de conteúdo dos guiões publicados no *Boletim IMAVE*, que constituirá o *corpus* essencial deste trabalho, complementados com entrevistas ao responsável das aulas televisionadas durante aquele ano, António Augusto Lopes que foram realizadas ao longo de 2008 e 2009 e com outra documentação relevante.

O LANÇAMENTO DA TELEVISÃO EDUCATIVA

A iniciativa de pôr a televisão ao serviço da educação era tão valorizada pelo Ministro que este tomou a decisão inédita de informar a população portuguesa. Assim, 12 de Dezembro de 1963, numa exposição feita através dos canais estatais — *Radiotelevisão Portuguesa* e *Emissora Nacional* — apresentou ao País as linhas gerais de um ambicioso programa destinado a melhorar a preparação cultural e escolar dos portugueses através da televisão.

Nesta comunicação Galvão Telles anunciou o estabelecimento da chamada *TV Escolar e Educativa*, salientando que se vinha trabalhando há vários meses na sua preparação, tendo uma comissão nomeada pelo Ministro[16] — presidida por António Leónidas e composta por representantes do *Ministério da Educação Nacional*, da *Rádio Televisão Portuguesa* (RTP) e da *Fundação Calouste Gulbenkian* — já procedido a trabalhos preparatórios. A emissão dos programas da *TV Escolar e Educativa* começou efectivamente em 6 de Janeiro de 1964.

Passado um ano, em 29 de Outubro de 1964, Galvão Telles fez uma outra comunicação ao país com o título *Meios Audiovisuais de Ensino* (Telles, 1965). Na perspectiva do Ministro, a experiência efectuada no último ano tinha criado um forte estímulo para prosseguir. Assim, na sua opinião, era chegado o momento da criação, no Ministério da Educação Nacional, de um organismo – *Instituto de Meios Audiovisuais de Ensino*[17] (IMAVE) que promovesse, unitária e coordenadamente, a utilização, expansão e aperfeiçoamento das várias técnicas audiovisuais como meios adjuvantes e de difusão do ensino e de elevação do nível cultural da população[18]. O Instituto teria atribuições diversas, entre as quais avultava a de promover a realização de programas de rádio e televisão escolares e outros de carácter educativo.

15 Referimo-nos ao Projeto de Cooperação Internacional CAPES/GRICES, intitulado “A Matemática Moderna no Brasil e em Portugal: estudos históricos comparativos”, desenvolvido entre 2006 e 2009.
16 Comissão de Televisão Escolar e Educativa.
17 Estatuído pelo Decreto-Lei nº 46 135, de 31 de Dezembro de 1964.
18 Esta formulação vai ser retomada no artigo 1º do Decreto-Lei nº 46 136, de 31 de Dezembro de1964.

O Ministro ambiciona o alargamento da escolarização pós-primária a mais estratos populacionais e a experiência de televisão educativa de 1965 mostra que, embora ela podssa ser uma alternativa barata e rápida, torna-se necessária uma organização central de carácter marcadamente pedagógico que apoie o novo sub-sistema educativo. Havia que conceber cursos, ministrá-los à distância e estruturar apoios educativos presenciais, através nomeadamente da figura do monitor e dos postos de recepção, assegurando o aproveitamento pelos alunos distantes. Coordenar todas estas actividades exigia uma instituição adequada, a *Telescola*, que também vai ser criada como organismo ligado ao IMAVE[19]. A sua sede seria no Porto, utilizando-se o estúdio de televisão aí existente e os programas seriam difundidos pelo único canal televisivo da época. A Portaria nº 21.113, de 17 de Fevereiro de 1965 criou o curso, estabeleceu a habilitação dos monitores, definiu os programas das disciplinas, determinou as condições de admissão, de matrícula, de frequência e de aproveitamento dos alunos.

Quando a Telescola foi implementada, existia em Portugal um sistema de ensino, cujas estruturas, aliadas a grandes dificuldades de ordem económica, nomeadamente nos meios suburbano e rural, condicionavam significativamente as possibilidades de progressão de estudos para além dos quatro primeiros anos. Foram, fundamentalmente, razões de ordem política as que levaram à criação deste sistema de ensino misto, isto é, a necessidade de diminuir as grandes assimetrias no desenvolvimento regional e de colmatar lacunas na rede escolar. No entanto, a Telescola representou uma inovação do ensino em Portugal e permitiu a título experimental, a unificação dos dois ciclos iniciais de ensino, ou seja, do primeiro ciclo do ensino liceal e do ciclo preparatório do ensino técnico profissional, constituindo via comum de acesso à subsequente fase de qualquer destes ramos.

O MODELO PEDAGÓGICO

Uma abordagem do ensino através da tecnologia televisiva vai exigir fortes mudanças no modelo pedagógico disseminado no resto do sistema. Em Portugal, optou-se pela difusão televisiva de aulas leccionadas por um corpo escolhido de “professores” em “postos de recepção”, seguida de uma exploração pelos alunos de actividades apoiadas por um “monitor”. Garantia-se assim que o mesmo professor, reputadamente um especialista na matéria, podia ser seguido simultaneamente por um elevado número de alunos nos mais diversos lugares, deixando a gestão quotidiana da aula, bem como a aplicação e a consolidação dos conhecimentos, a outros profissionais menos habilitados ou menos conceituados. O ciclo básico de aprendizagem era constituído por uma lição televisiva de 20 minutos (que se supunha corresponder à capacidade máxima de concentração dos alunos) seguida de uma exploração de 30 minutos, na aula, orientada por um monitor. O

[19] Estatuída pelo Decreto-Lei nº 46 136, de 31 de Dezembro de 1964.

professor era o centro do programa televisivo. Existiam limitações devidas à ausência de comunicação directa entre o professor e o aluno e, para as colmatar, por um lado, o professor procurava estabelecer uma atmosfera análoga à da aula, dirigindo-se frequentemente à turma através da televisão e, por outro, o monitor podia formular perguntas directas a qualquer aluno ou à turma inteira. As emissões, para dar mais realismo ao processo de ensino e para introduzir referências de última hora, eram usualmente em directo.

O contributo dos monitores era pois muito importante. A sua acção consistia, de modo geral, no reforço da lição televisiva na qual se deveriam integrar completamente. Terminada a lição televisiva, tinha início o período de exploração. Se o tempo de que dispunham não era suficiente, uma parte do período mais longo de exploração, no final ou no início do dia, podia ser utilizado para terminar os exercícios ou dedicado a actividades criativas. O trabalho de casa era uma excepção. Excluía-se o trabalho de casa de carácter livresco, restringindo-o a uma extensão prática ou criativa do trabalho de aula, como por exemplo, procurar determinada notícia no jornal, plantar uma semente e observar o seu crescimento, medir o leite de uma vaca ou de uma cabra, etc. associando-o assim ao quotidiano dos alunos a quem preferencialmente se destinava o curso.

Até 1975, a criação das emissões concentrava-se na sede da Telescola, em Vila Nova de Gaia e as emissões de cada disciplina eram criadas pelo grupo de professores da mesma. A dimensão e a composição destes grupos variou conforme o ano lectivo e as matérias, nomeadamente, em função do número de aulas semanais, sendo o número usual de elementos três ou quatro. Salientamos que criar e apresentar os programas não eram as únicas ocupações deste grupo de professores, as suas tarefas eram mais alargadas: a preparação de diversa documentação de apoio para monitores e a elaboração de testes de avaliação. Para os monitores, preparavam um sumário impresso das emissões, algumas notas explicativas necessárias, sugestões para outras actividades que eram publicadas no boletim IMAVE. Acresce que, em cada período, cada equipa de disciplina tinha a obrigação de produzir uma emissão destinada a aconselhar o monitor sobre determinados pontos e problemas susceptíveis de se levantarem. Os testes eram de escolha múltipla e, em geral, o seu número anual era seis (OCDE, 1977).

OS POSTOS DE RECEPÇÃO

Os postos de recepção foram criados recorrendo a uma participação da iniciativa privada (Telles, 1965)[20]. Estes seriam instituições de ensino particular, sujeitas à respectiva legislação. Cada posto tinha um administrador

[20] O suporte estatal não abrangia o funcionamento quotidiano dos postos nem os salários dos monitores. Por exemplo, o texto “Matemática, indicações didácticas de ordem geral” (1965, p. 84) sugere-se que seja constituído um pequeno fundo monetário comum “constituído por comparticipação equitativa dos alunos nas despesas a efectuar” destinado a custear a compra de material para as aulas de Matemática.

local e, cada sala de estava sob a responsabilidade de um monitor a quem competia assegurar a disciplina, preparar a recepção, orientar os trabalhos de aplicação de que as lições eram normalmente seguidas, esclarecer dúvidas dos alunos e certificar-se do seu aproveitamento.

A Telescola custeava a produção e emissão dos programas, bem como o controlo e supervisão de todo o sistema, cabendo ao responsável local a despesa da recepção. Para fazer face a estes custos, os alunos de um posto pagavam uma propina mensal cujo valor máximo era fixado pelo Ministério. Os postos de recepção situavam-se normalmente em salas utilizadas durante a manhã para o ensino primário, ou seja, estavam sedeados na escola primária local. Mais tarde, em algumas localidades, construíram-se pavilhões próprios para acolher os alunos deste ensino (OCDE, 1977).

No ano de 1965/66, início do *Curso Unificado da Telescola* (CUT), havia cerca de 100 postos de recepção. Dados posteriores (OCDE, 1977) sugerem que existiriam em média duas turmas por posto um do 5.º ano e uma do 6.º ano. Cada uma tinha dois professores, normalmente, um para as Letras e o outro para as Ciências que trocavam (enquanto um estava a leccionar o 5.º ano, o outro ensinava o 6.º). Não foram encontrados ainda números de monitores mas poderemos dizer cerca de 1800 com turmas de mais ou menos 20 alunos.. Nos primeiros anos da Telescola, os adultos representavam cerca de 10% do auditório das emissões do CUT. Porém, com o passar do tempo esta proporção diminuiu em consequência do aumento do número de crianças e da prioridade que lhes foi atribuída face aos adultos. O número de postos foi aumentando e em 1967/68 estava próximo de 600. Os primeiros postos oficiais apareceram em 1971/72 e o seu número era, então, inferior ao número de postos particulares. Em 1974/75, os alunos eram cerca de 40.000 e o número de postos situava-se perto de 900, mas o número de postos particulares já era muito inferior ao de postos oficiais. O Ministério foi convertendo em postos oficiais os postos de recepção, assim, o número de postos particulares foi diminuindo, tornando-se quase residual (OCDE, 1977).

OS MONITORES

Podiam ser monitores do CUT os professores habilitados de qualquer grau de ensino oficial, ou os que possuíssem o 3º ciclo liceal, um curso médio, ou equivalente (Portaria nº 21.358). Na prática, até 1974/75, os monitores eram, na sua maioria, professores primários trabalhando em horas extraordinárias (OCDE, 1977).

Com o objectivo de coordenar as acções pedagógicas entre professores e monitores, a Telescola procurava proporcionar a estes últimos uma preparação pedagógica e didáctica levada a cabo pelos professores responsáveis pelas disciplinas. Assim, inseridos na fase de preparação das actividades escolares, entre 15 e 25 de Outubro de 1965 e de 1 a 15 de

Outubro nos anos subsequentes, realizaram-se, na RTP ou na Emissora Nacional, programas diários de Orientação de Monitores, os quais visavam transmitir directrizes práticas de pedagogia e didáctica geral e de didáctica das diversas disciplinas. Os programas da formação do início do ano duravam 30 minutos e só existia um por ano e por disciplina. A partir de 67/68 esta formação foi realizada ao longo de uma semana, 6 dias inteiros 6 horas por dia. Por exemplo, em 73/74 o 7.º curso de formação de monitores aconteceu em 5 cidades do continente e também na Madeira, tendo este último a participação de cerca de 200 monitores.

Procurava-se igualmente institucionalizar ligações periódicas entre a Telescola e os postos através de um boletim mensal (*Boletim IMAVE*[21]), destinado a servir de orientação pedagógica aos monitores, onde eram publicados os resumos das lições a proferir no mês seguinte, bem como outros elementos ou esclarecimentos julgados necessários. Os monitores deviam completar as instruções proporcionadas por estes programas com a leitura e ponderação dos *Guias de Trabalho*, organizados pela Telescola, das indicações didácticas incluídas no boletim e de alguma bibliografia aconselhada. No resto do ano, continuavam a ser transmitidos programas de Orientação de Monitores.

O PROGRAMA DO CURSO UNIFICADO DA TELESCOLA

A Portaria nº 21.113, de 17 de Fevereiro de 1965, estabelece que o curso ministrado na Telescola deverá ser composto pelas disciplinas (e respectivos programas) que constituíam o Ciclo Preparatório do Ensino Técnico Profissional, acrescidas pelo Francês (com o programa do 1.º ciclo liceal) e a Portaria nº 21.358, de 26 de Junho de 1965, deu-lhe a designação de *Curso Unificado da Telescola* (CUT) que se vai manter até 1968 quando é substituído pelo *Ciclo Preparatório TV*, versão a distância do *Ciclo Preparatório do Ensino Secundário*.

O CUT iniciou as suas lições em 25 de Outubro de 1965. Nesse ano lectivo, o seu horário diário iniciava-se às 15:00 e terminava às 20:00, de 2ª a 6ª feira, respeitadando as férias escolares usuais (Natal, Carnaval, Páscoa). Uma lição emitida de 20 minutos era, na maioria dos casos, seguida de 25 a 30 minutos de exploração na aula orientada pelo monitor. No fim do dia havia um período adicional de 30 minutos de exploração que não estava ligado a nenhuma emissão em especial. No sábado, as emissões das lições do CUT começavam às 15:00 e terminavam às 16:45. Durante a semana, as disciplinas ministradas eram: Língua e História Pátria (quatro lições), Francês (quatro lições), Matemática (três lições), Ciências Geográfico-Naturais (três lições), Desenho (duas lições), Trabalhos Manuais (duas lições), Educação Física (uma lição) e Religião e Moral (uma lição). No Sábado, eram emitidas

[21] No fim do primeiro ano, a designação do jornal alterou-se para *IMAVE: Boletim do Instituto de Meios Áudio-Visuais de Ensino*.

lições das disciplinas de Canto Coral, Religião e Moral, Desenho e Educação Física. As lições de Educação Física e Canto Coral ocupavam 25 minutos e não dispunham de exploração imediata; para Religião e Moral também não havia exploração imediata.

A NOVA LINGUAGEM DA MATEMÁTICA ESCOLAR NA TELESCOLA

A disciplina de Matemática do CUT no ano lectivo 1965/66 (e em anos seguintes) foi apresentada por António Augusto Lopes que tinha sido convidado por Olívio de Carvalho, à data, director do curso da Telescola ("Foi aprovado o horário da TV Escolar e Educativa", 1965). Metodólogo do Liceu Normal de D. Manuel II, no Porto, Lopes fazia parte, desde 1963, da Comissão de Revisão do Programa do 3.º Ciclo Liceal, presidida por Sebastião e Silva, e participava activamente na experiência de introdução da Matemática Moderna neste último ciclo liceal. Quando o CUT se iniciou, era o único professor da disciplina de Matemática, acumulando a criação e a apresentação das emissões perante as câmaras. Para além disso, elaborou toda a documentação de apoio e os testes de avaliação.

A renovação curricular denominada Matemática Moderna ocorreu em todos os sistemas educativos mundiais com maior ou menor intensidade desde o final dos anos 50 do século XX. A sua influência foi sentida em Portugal quase desde o início do movimento, e, a partir dos anos 60, desenvolvem-se experiências pedagógicas no ensino primário e liceal. Mais tarde, no final dos anos 60, concretizam-se fortes alterações curriculares em quase todos os sub-sistemas de ensino (Matos, 1989). No que respeita ao programa de Matemática da Telescola, apesar da legislação apontar para o programa do ciclo inicial das Escolas Técnicas,

envereda-se abertamente – não sem algumas apreensões – pelos caminhos da Matemática Moderna, sem prejuízo do ensino das matérias constantes dos programas oficiais. ("Introdução ao Curso Unificado", 1965, p. 12)

Embora nesta época decorressem diversas iniciativas (cursos, conferências, etc.) incidindo sobre a Matemática Moderna e estivesse a decorrer uma experiência curricular no último ciclo dos liceus, vai ser no CUT em 1965/66 que, pela primeira vez, se generalizam oficialmente as novas ideias a todo um sub-sistema de ensino em Portugal[22].

Analisámos o *corpus* desta investigação, constituído pelos textos das 87 "lições" de Matemática que decorreram durante o ano lectivo de 1965/6 publicados antecipadamente no *Boletim IMAVE*, todos escritos por António Augusto Lopes. As lições decorreram nas segundas, quartas e sextas-feiras de

[22] Denominaremos ocasionalmente de "clássica" a abordagem educativa anterior à da Matemática Moderna.

cada semana, iniciaram-se logo a 25 de Outubro de 1965 e terminaram a 29 de Junho de 1966.

A quase totalidade destes textos tem uma estrutura semelhante: 1) um *Sumário* que resume o conteúdo da lição, 2) um *Esquema Descritivo* ou *Emissão* que acompanha o guião televisivo executado pelo *professor*, 3) uma identificação do *Material* necessário durante a recepção ou após esta, e 4) indicações para uma *Exploração* conduzida pelo *monitor*, contendo diversas sugestões metodológicas e normalmente composta por exercícios de aplicação. As lições consagradas aos "Exercícios de apuramento" (6 ao longo do ano), as respectivas lições de "correcção" são a excepção, pois apenas contêm o Sumário. Algumas das segundas contêm ainda indicações breves ou alguns exercícios.

Os conjuntos e suas operações são encarados como uma linguagem básica para a matemática e vistos como uma das grandes alterações introduzidas na matemática escolar pela reforma da Matemática Moderna e as 5 primeiras lições da Telescola, que corresponderam às primeiras duas semanas de aulas[23], foram consagradas à sua exploração. A Lição nº 1, após apresentação do professor, aborda os "conceitos de **conjunto** (sinónimo: **colecção**) e de **elemento de um conjunto** (sinónimo: **indivíduo**, **ser**, **objecto**)" (Lição nº 1, 1965, p. 86[24]). Imediatamente a seguir se enfatiza a distinção entre conjunto, elementos do conjunto e respectivas designações.

Figura 1. Conjuntos, seus elementos e respectivas designações (1965, p. 86)

2 — Em seguida, o professor apresenta o primeiro exercício — **que todos devem fazer!** Trata-se de preencher uma tabela: — numa coluna figuram **designações de conjuntos**; noutra coluna figuram as **designações dos elementos** desses conjuntos. **De notar:** qualquer **formigueiro** é um conjunto, mas **um conjunto de formigas** não é, necessàriamente, **um formigueiro**: o mesmo para outros casos semelhantes.

No final da emissão, o professor sintetiza que "**um objecto** (qualquer que seja a sua natureza) **não deve ser confundido com o símbolo que o representa**" (p. 86). Na fase de Exploração, o monitor coloca diversos "exercícios orais" (p. 88) e de revisão centrados na distinção entre conjunto e os seus elementos e na relação de pertença. Nas lições seguintes vão ser introduzidos outros conceitos básicos sobre conjuntos, bem como as suas representações (simbologia, diagramas de Venn, "setas" representando relações binárias).

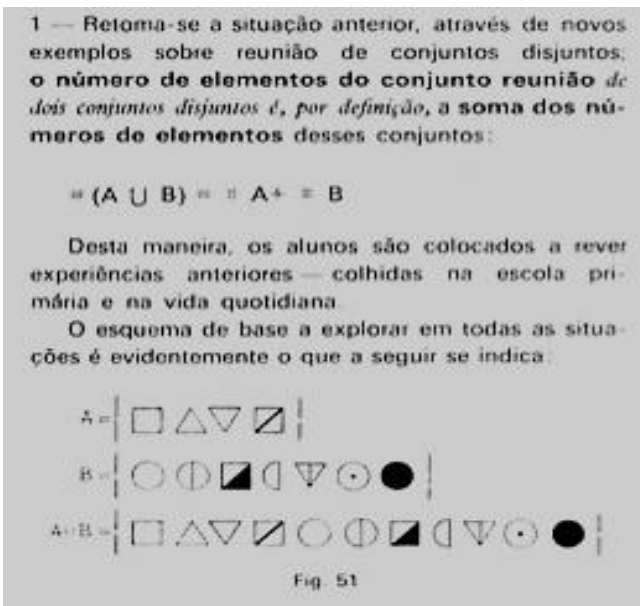
[23] De segunda-feira 25/10 a sexta, 5/11 de 1965 excepto 1/11 que foi feriado.
[24] Neste trabalho, quer o negrito, quer o itálico nas citações correspondem sempre a ênfases do original.

Analisando o *corpus*, destacamos dois tipos de alterações dos conteúdos matemáticos provocados por esta ênfase na linguagem de conjuntos. Em primeiro lugar, o recurso aos conjuntos como uma forma nova de comunicar conhecimentos matemáticos. Em segundo, a introdução de tópicos matemáticos especificamente associados a conjuntos e suas operações.

Quanto ao primeiro tipo de alterações, observemos, por exemplo, o modo como a adição, que já tinha sido objecto de estudo no ensino primário, é retomada, não associada à contagem de agregações de objectos concretos, mas como o número de elementos da reunião de conjuntos disjuntos (figura 2) quase sempre constituídos por entidades abstractas. O mesmo pode ser observado no modo escolhido para ensinar as restantes operações aritméticas.

A mudança de matematizações com referência ao concreto para matematizações baseadas em entidades abstractas e cuja legitimidade depende, não de regras derivadas do senso comum do mundo real, mas de regras construídas arbitrariamente, já tinha sido detectada para alunos da mesma faixa etária nos materiais curriculares para o primeiro ano de funcionamento do *Ciclo Preparatório do Ensino Secundário*, 1968/69 (Matos, 2009).

Figura 2. A adição e a reunião de conjuntos disjuntos (Lição nº 13, 1965, p. 117)[25]



1 — Retoma-se a situação anterior, através de novos exemplos sobre reunião de conjuntos disjuntos; **o número de elementos do conjunto reunião** *de dois conjuntos disjuntos é, por definição*, **a soma dos números de elementos** desses conjuntos:

$\# (A \cup B) = \# A + \# B$

Desta maneira, os alunos são colocados a rever experiências anteriores — colhidas na escola primária e na vida quotidiana.

O esquema de base a explorar em todas as situações é evidentemente o que a seguir se indica:

Fig. 51

[25] Apesar de o conceito de cardinal ter sido abordado na Lição nº 4, e de o seu símbolo ser utilizado nesta lição, o termo não é referido.

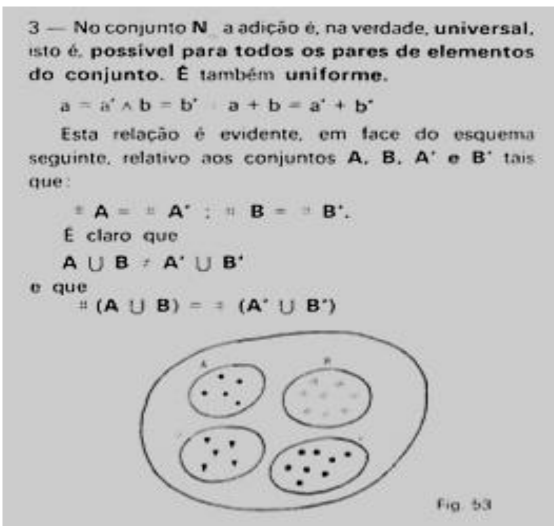
A utilização da linguagem de conjuntos requer, no entanto, um enquadramento matemático mais complexo. Por exemplo, a importância de precisar qual o universo em que as operações são definidas requer que, logo após ter sido apresentada a "definição" de soma na Lição nº 13 (1965, p. 117), se discuta que a adição pode não ser nem uma lei de composição interna nem universal. No universo E,

$$E = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \},$$

a adição não está definida para todos os pares de elementos de E (3+4 está definida, mas não 5+8) (1965, p. 117). A adição, cuja possibilidade não suscitava dúvidas no ensino primário (nem na "matemática clássica" dos primeiros ciclos das escolas técnicas e dos liceus), pois a sua legitimidade assentava num senso comum proveniente da experiência empírica, sensorial dos alunos, necessita agora que se precisem melhor todos os seus elementos constitutivos.

O facto de agora a constituição de conjuntos e as suas operações poderem obedecer a uma lógica independente do concreto, levanta igualmente problemas. Por exemplo, na mesma Lição nº 13 é discutida a diferença entre a reunião de conjuntos e número de elementos (figura 3).

Figura 3. Reunião de conjuntos e adição (Lição nº 13, 1965, p. 117)



3 — No conjunto **N** a adição é, na verdade, **universal**, isto é, **possível para todos os pares de elementos do conjunto. É** também **uniforme.**

$a = a' \wedge b = b' \Rightarrow a + b = a' + b'$

Esta relação é evidente, em face do esquema seguinte, relativo aos conjuntos **A**, **B**, **A'** e **B'** tais que:

$\# A = \# A' \; ; \; \# B = \# B'.$

É claro que

$A \cup B \neq A' \cup B'$

e que

$\#(A \cup B) = \#(A' \cup B')$

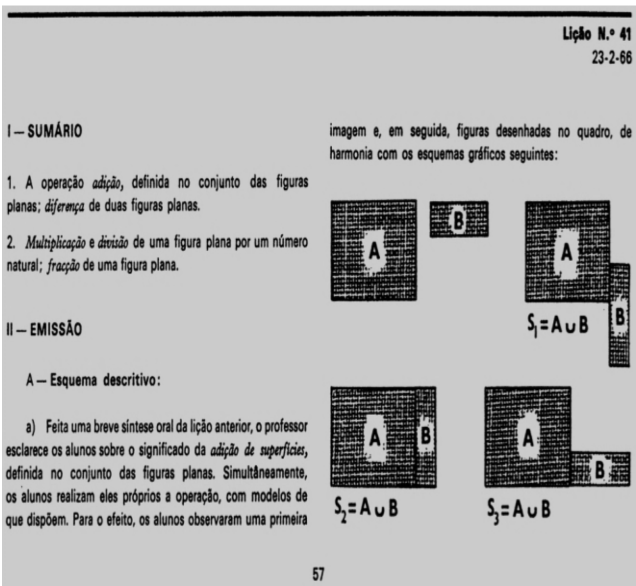
Fig. 53

Enquanto que no ensino "clássico" podemos constituir classes de flores, ou de flores vermelhas, ou de rosas, por exemplo, isto é, a constituição de colecções segue as categorizações linguísticas (Lakoff, 1987), e portanto são legitimadas pelo seu uso cultural, ao se pretender a maior generalidade, surgem colecções arbitrárias como as da figura 3 que necessitam de cuidados especiais.

As restantes operações aritméticas vão ser igualmente objecto de reformulações linguísticas, associando a subtracção à diferença entre conjuntos, a multiplicação ao cardinal do produto cartesiano e a divisão à partição de um conjunto.

Quanto ao segundo tipo de alterações dos conteúdos matemáticos provocados pela ênfase na linguagem de conjuntos — a introdução de tópicos especificamente associados a conjuntos e suas operações —, tomemos, por exemplo, a Lição nº 41 emitida a 23/2/66 ("Lição nº 41", 1966) cujo Sumário se centrava em operações sobre figuras geométricas. Durante a Emissão, António Lopes planeava discutir a junção de figuras geométricas utilizando a linguagem dos conjuntos. A figura 4 mostra a primeira página desta Lição que discutiu as operações de adição e subtracção no conjunto das figuras planas e as operações de multiplicação e divisão de uma figura plana por um número natural, bem como o conceito de fracção de uma figura plana.

Figura 4. O *Sumário* e o início da *Emissão* da Lição nº 41 (1966, p. 57).



Lição N.º 41
23-2-66

I — SUMÁRIO

1. A operação *adição*, definida no conjunto das figuras planas; *diferença* de duas figuras planas.

2. *Multiplicação* e *divisão* de uma figura plana por um número natural; *fracção* de uma figura plana.

II — EMISSÃO

A — Esquema descritivo:

a) Feita uma breve síntese oral da lição anterior, o professor esclarece os alunos sobre o significado da *adição de superfícies*, definida no conjunto das figuras planas. Simultâneamente, os alunos realizam eles próprios a operação, com modelos de que dispõem. Para o efeito, os alunos observaram uma primeira imagem e, em seguida, figuras desenhadas no quadro, de harmonia com os esquemas gráficos seguintes:

57

A operação de adição dos dois rectângulos, formulada na linguagem dos conjuntos, tem alguma complexidade. Por um lado, o resultado da operação depende do modo como ela for concretizada (a figura 4 mostra três resultados distintos), por outro, implicitamente assume-se que a "posição inicial" não é **uma** figura, mas **duas,** o que levanta problemas quanto a um possível "elemento neutro" da operação.

Reconhecendo estas dificuldades, na página seguinte, estabelecia-se que a operação de adição de superfícies era possível, mas não uniforme, pois "$S_1 \neq S_2$; $S_2 \neq S_3$; $S_1 \neq S_3$" (p. 58). Segue-se depois uma discussão sobre a diferença de duas superfícies e a figura 5 mostra como ela era associada a operações sobre conjuntos.

Tal como para a adição, observa-se que a operação não é uniforme. A adição e a subtracção definida no conjunto das figuras geométricas, levantam muitos problemas matemáticos e deve ter havido dúvidas sobre o interesse da sua introdução no currículo, pois, mais tarde, o tema não é retomado. Para além de não serem uniformes, o resultado das operações pode conduzir a figuras geométricas não convexas, ou mesmo não conexas. Por outro lado, não possuem estrutura de grupo, não tendo pois qualquer similitude com as operações aritméticas.

Seguidamente discute-se "a multiplicação de uma superfície (figura plana) por um número natural e a divisão por um número natural" (p. 58) (figura 6).

Figura 5. Ilustrando a *diferença* de duas superfícies na Lição nº 41 (1966, p. 58).

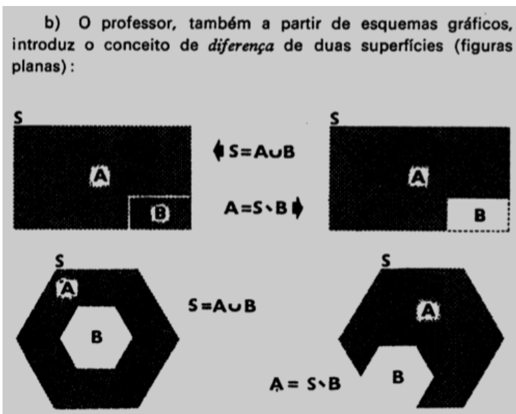
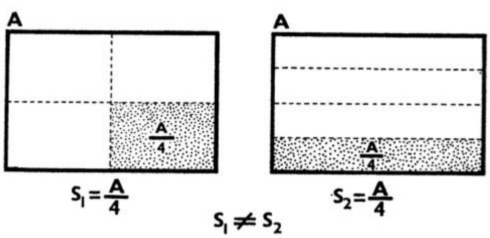


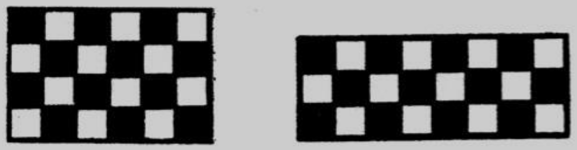
Figura 6. Ilustrando a multiplicação de uma superfície por um número natural na Lição nº 41 (1966, p. 58).



A operação volta a não ser uniforme, pois, embora S_1 e S_2 tenham a mesma área, não figuras geometricamente iguais. Dois dias depois, na Lição seguinte, o tema é brevemente retomado através de divisões de rectângulos por números inteiros e estabelece-se o conceito de superfícies equivalentes (as que têm áreas iguais) (figura 7).

O tema das operações sobre figuras planas não é retomado em 1968/69 quando é introduzido o programa do novo Ciclo Preparatório do Ensino Secundário.

Figura 7. Superfícies equivalentes (Lição nº 42, 1966, p. 59).



S_1: $(6 \times 4) cm^2$ S_2: $(8 \times 3) cm^2$

S_1 e S_2, superfícies diferentes, *são equivalentes: têm áreas iguais.*

Uma nova imagem torna evidente a afirmação anterior, mostrando que:

1.º) S_1 contém 6×4 centímetros-quadrados;

2.º) S_2 contém 3×8 centímetros-quadrados.

b) A *área* de *uma superfície* (em princípio, uma figura plana) é concebida como *um número que se faz corresponder a essa superfície* (e a todas as que lhe são equivalentes).

Tomando *como unidade de medida das superfícies a superfície de um quadrado de lado igual à unidade de comprimento, e atribuindo-lhe a área* 1, então, *a medida e a área de uma superfície exprimem-se por um mesmo número.*

Assim, dizendo que *a unidade* 1 *cm*² *tem a área* 1, *se uma figura tem a superfície de* 25 *cm*², *a sua área é* 25.

DIFERENCIAÇÕES DE COMUNICAÇÃO NA CONSTRUÇÃO CURRICULAR NA TELESCOLA

As operações sobre superfícies, com uma forte ênfase na linguagem de conjuntos, abordadas pelo professor essencialmente nas Lições nº 41 e 42 (que analisámos na secção anterior, não são retomadas nas actividades de exploração recomendadas para aquelas lições e conduzidas pelo monitor. O contraste entre as intervenções educativas do professor e do monitor pode ser observado na figura 8, referente à Lição nº 41, onde se apresentam as tarefas a propor pelo segundo. Estas tarefas, envolvendo essencialmente a resolução de exercícios sobre a conversão entre unidades de massa, um problema sobre múltiplos formulado em termos de conjuntos e a resolução de expressões numéricas, são muito distantes dos conteúdos abordados pelo professor na mesma lição e que analisámos atrás. Na lição seguinte pretende-se de novo que o monitor proponha mais alguns exercícios.

O Exercício de apuramento está-se a aproximar (será na Lição nº 43, daí a cinco dias, na segunda-feira seguinte) e é claro o propósito de preparar os alunos, quer durante estas duas Lições, tarefa que recai essencialmente sobre o monitor.

Figura 8. Tarefas a propôr pelo monitor na Lição nº 41 (1966, p. 58).

b) ***No quadro***

1. *Calcular :*

1.) 7,4 g + 575 mg + 3,47 dg (em centigramas);

2.º) 2 34 hg + 15,6 dag + 0,8 kg (em decagramas:.)

2. *Determinar :*

1.º) O conjunto A dos múltiplos de 8 compreendidos entre 50 e 90.

2.º) O conjunto B dos múltiplos de 16 compreendidos entre 45 e 100.

3.º) O conjunto A ∩ B.

3. *Calcular :*

$x = (2 + 4 \times 3) : 7 + (2 \times 3 - 1) \times 4 : 5$

$y = 6 \times 4 : 8 + 2 \times (3 + 1 \times 2) - (2 + 4 \times 2) : 2$

Respostas:

1. 1.º) 832,2 cg; 2.º) 119 dag.
2. 1.º) $A = \{56, 64, 72, 80, 88\}$; 2.º) $B = \{48, 64, 80, 96\}$
   3.º) $A \cap B = \{64, 80\}$
3. $x = 6$; $y = 8$.

As diferenças entre as funções educativas do professor e do monitor podem ser analisadas através da heurística dos momentos de construção curricular propostos por Gimeno (1998), que permitem distinguir pontos nevrálgicos que afectam a transformação do currículo desde a sua definição, por exemplo a nível central, até à aprendizagem dos alunos (p. 104). Interessa-nos particularmente três momentos em que o currículo é "objectivado" de modos distintos através de diferentes intervenientes: o *currículo prescrito* (o *programa*, isto é, a proposta formal, que nos sistemas centralizados é da responsabilidade das entidades oficiais), o *apresentado aos professores* através dos mediadores (principalmente dos manuais) e o *modelado pelos professores*.

O *currículo prescrito* dos sistemas educativos centralizados contem um conjunto de prescrições ou orientações "que actuam como referência na ordenação do sistema curricular, servem de ponto de partida para a elaboração de materiais, controlp do sistema, etc." (Gimeno, 1998, p. 104).

Raras vezes, no entanto, os professores recorrem directamente a estes elementos. “Existem [outros] meios estruturadores da própria acção, que oferecem a professores e alunos a estratégia de ensino em si” (p. 150) que podemos designar pelo *currículo apresentado aos professores* e que se materializa usualmente nos livros de texto.

No contexto português, a Telescola coloca, no entanto, alguns desafios particulares a esta distinção de Gimeno. Em primeiro lugar, a usual função docente encontra-se repartida entre um “professor” e um “monitor”. Ao primeiro compete a explicitação *ex-cathedra* dos conteúdos num plano distanciado e superior (em sentido figurado, mas também literal, já que a televisão deveria estar colocada num plano elevado) e ao segundo, a sua exploração e consolidação no plano da sala de aula e em interacção com os alunos. Conforme se explicita logo na “Indicações didácticas de ordem geral” referentes à Matemática:

Compete ao monitor assegurar o desenvolvimento pleno da actividade dos alunos,

> como for determinado pelo professor e sem coarctar o ritmo próprio de cada aluno. (p. 83)

Em segundo lugar, o programa de Matemática vai sendo definido por António Augusto Lopes ao longo de 1965/66 de um modo distinto do que prescreviam as determinações oficiais, embora com a concordância tácita das autoridades[26].

A usual sequência Ministério > Mediadores > Professor (ou Programa > Livros de texto > Planificação da aula) é subvertida e, pelo menos neste ano lectivo de 1965/66 temos simultaneamente um actor: o “professor”, que elabora o programa, que o medeia em “Lições” e parcialmente o lecciona; e outro actor: o “monitor”, que se apropria, não só do conteúdo das “Lições”, mas também da aula televisionada e que lecciona as dimensões mais práticas (ou presenciais) do ensino. Não existe ainda investigação que permita compreender a cultura de aula, em particular da aula de matemática, gerada neste contexto. No entanto, parece adequado conjecturar que, presencialmente, a matemática seria associadas a práticas[27] ocasionais de manipulação de materiais e essencialmente de resolução de exercícios conduzidas pelo monitor. No espaço televisivo ocupado pelo professor, por outro lado, dominavam as dimensões de representação associadas ao estabelecimento da linguagem técnica, normalmente associada aos conteúdos programáticos de matemática.

[26] António Lopes indica que, por um lado, Sebastião e Silva e a Comissão concordavam com o seu trabalho, por outro, tinha-lhe sido dada inteira liberdade para a definição dos conteúdos do programa.

[27] Usamos aqui a distinção entre *representações* (ou *normas*) e *práticas* que compõem a cultura da escola (Viñao, 2007).

Não seria justo, no entanto, simplificar esta análise, distinguindo entre um ensino meramente expositivo do professor e outro prático e concreto do monitor. Por um lado, como afirmámos, não existem estudos sobre as práticas escolares na Telescola. Por outro, as intervenções do professor estão recheadas da perspectiva da Escola Nova, valorizando as aprendizagens autónomas dos alunos e que, embora lhe seja anterior, permeia todas as intervenções de Matemática Moderna que têm sido objecto de estudo em Portugal (Matos, 2009).

FONTES

Decreto-Lei nº 46.135, de 31 de Dezembro de 1964.

Portaria nº 21.113, de 17 de Fevereiro de 1965.

Portaria nº 21.358, de 26 de Junho de 1965

IMAVE: Boletim do Instituto de Meios Áudio-Visuais de Ensino.

OCDE. (1977). Uma revisão para avaliação da Telescola. Paris: OCDE.

Telles, I. G. (1964). *Televisão Educativa*. Lisboa: Ministério da Educação Nacional.

Telles, I. G. (1965). *Meios Audiovisuais de Ensino*. Lisboa: Ministério da Educação Nacional.

Introdução ao Curso Unificado (1965). *Boletim IMAVE, Outubro-Novembro*, 12-13.

Matemática, indicações didácticas de ordem geral (1965). *Boletim IMAVE, Outubro-Novembro*, 83-85.

Lição nº 46 (1966). *Boletim IMAVE, Março*, 57-59.

Foi aprovado o horário da TV Escolar e Educativa (1965, 30 de Setembro de 1965). *Diário de Lisboa,* p. 20.

REFERÊNCIAS

Gimeno Sacristán, J. (1998). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: Artmed.

Lakoff, G. (1987). *Women, fire, and dangerous things. What categories reveal about the mind.* Chicago: University of Chicago Press.

Matos, J. M. (1989). *Cronologia recente do ensino da Matemática*. Lisboa: APM.

Matos, J. M. (2009). Changing representations and practices in school mathematics: the case of Modern Math in Portugal. Em K. Bjarnadóttir, F. Furinguetti e G. Schubring (Eds.), "Dig where you stand" Proceedings of a Conference on On-going Research in the History of Mathematics Education, Garđabær, Iceland, June 20-24 2009. Reikyavik: Universidade da Islândia.

Teodoro, A. N. D. (1999). *A construção social das políticas educativas. Estado, educação e mudança social no Portugal contemporâneo*. Tese de doutoramento não publicada, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Viñao Frago, A. (2007). *Sistemas educativos, culturas escolares e reformas*. Mangualde: Edições Pedag

A comunicação matemática no contexto de actividades de Investigação: O uso de representações matemáticas[28]

Ana Henriques
Escola Naval
João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

RESUMO

Recentes desenvolvimentos na educação matemática salientam que a comunicação está fortemente relacionada com a resolução de problemas e o raciocínio. Além disso, as representações matemáticas desempenham um papel importante na comunicação, quer se considere a sua dimensão escrita ou oral. Neste artigo analisamos os modos de representação que os estudantes universitários escolhem para comunicar as suas estratégias de raciocínio na exploração de actividades de investigação e na resolução de problemas realizados durante uma experiência de ensino na disciplina de Análise Numérica. A metodologia de investigação é qualitativa e interpretativa, baseada em estudos de caso. Os dados são recolhidos utilizando observação participante, relatórios de investigação dos alunos e entrevistas. Os resultados apresentados são baseados na análise do desempenho de três alunos e revelam que a realização de tarefas de investigação permite-lhes utilizar e interpretar diferentes representações para encontrar soluções, explicar e justificar os seus raciocínios e verificar resultados. Os resultados mostram, ainda, que os alunos são capazes de estabelecer relações entre diferentes representações.

A comunicação matemática sobressai das actuais recomendações para o ensino da Matemática em vários níveis de ensino (AMATYC, 2006; MAA, 2003, 2004; NCTM, 2000). De facto, estes documentos oficiais recomendam a incorporação, nos programas curriculares, de actividades que ajudem os estudantes a desenvolver competências de comunicação, fundamentais para estruturar o pensamento matemático e para transmitir os raciocínios de forma coerente e clara. Até certo ponto, estas competências são adquiridas no final do ensino secundário mas, segundo a MAA (2003), a experiência pós-secundária deverá reforçar o que é aprendido tanto em profundidade como em qualidade e ir mais longe. Por isso, nas suas recomendações curriculares, salienta que estes alunos devem ser capazes de: (i) usar uma variedade de ferramentas tecnológicas; e (ii) comunicar matematicamente, tanto oralmente como através da escrita e ler matemática.

[28] Este estudo foi realizado no âmbito do Projecto *Improving Mathematics Learning in Numbers and Algebra*, apoiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia - MCTES (contrato PTDC/CED/65448/2006).

Neste processo, as representações matemáticas são consideradas como “ferramentas essenciais para a comunicação e raciocínio sobre conceitos e informação em Matemática” (Greeno e Hall, 1997, p. 362). Além disso, as representações matemáticas dos alunos revelam, pelo menos potencialmente, os modos como os estudantes pensam e os processos que utilizam na resolução de problemas, desempenhando, assim, um papel importante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática (Goldin, 2002). Deste modo, afigura-se pertinente a realização de um estudo com o objectivo de descrever e analisar os modos de representação utilizados pelos estudantes para comunicar as suas estratégias de raciocínio durante a exploração de actividades de investigação e a resolução de problemas.

AS REPRESENTAÇÕES COMO SUPORTE PARA COMUNICAR E RESOLVER PROBLEMAS

A literatura evidencia que a comunicação matemática está fortemente relacionada com a resolução de problemas e o raciocínio (Brenner et al., 1997; Neria e Amit., 2004). Esta relação é uma consequência natural da necessidade dos estudantes se envolverem na explicação, justificação e discussão de estratégias matemáticas e soluções, quando resolvem problemas. Como estas actividades requerem o uso de diferentes formas de representação matemática que apoiem a compreensão e favoreçam a comunicação de ideias matemáticas (Greeno e Hall, 1997), o sucesso dos estudantes no processo de resolução de problemas está dependente das suas competências na construção e no uso dessas representações. Deste modo, as representações matemáticas tornam-se um aspecto central da comunicação, em particular da sua dimensão escrita (Boavida et al., 2008).

Os estudantes podem explicar uma estratégia matemática ou uma solução numa variedade de formas, usando diversos tipos de representação. Alguns autores destacam determinados tipos de representações, como sejam a linguagem natural e a simbólica e as formas visuais de representação (onde incluem os gráficos, as tabelas, as figuras, etc.), pela frequência com que surgem em contextos educacionais e pelas funções que desempenham nesses ambientes. Por exemplo, Duval (2006) agrupa as representações semióticas em quatro tipos de registos: os registos monofuncionais que tomam a forma algorítmica e têm como função cognitiva o processamento matemático (sistemas de escrita matemática – representações discursivas; gráficos cartesianos – representações não discursivas) e os registos multifuncionais que visam uma variedade de funções cognitivas, como sejam a comunicação e a imaginação (linguagem materna e formas de raciocínio – representações discursivas; figuras geométricas – representação não discursiva). Autores como Greeno e Hall (1997), Gagatsis e Shiakalli (2004) e Ainsworth (2006) defendem que estas diferentes representações não devem ser consideradas alternativas nem independentes entre si e sublinham a importância de se estabelecerem conexões entre vários tipos de representações. A literatura indica que a capacidade de traduzir dentro e entre diferentes representações de conceitos matemáticos é essencial no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de um indivíduo (Elia, Panaoura, Eracleous e Gagatsis, 2007; Even, 1998; Greeno e Hall, 1997).

Outros estudos relatam as preferências e as dificuldades dos estudantes em relação ao uso de determinadas representações matemáticas. Por exemplo, Boero, Douek e Ferrari (2008) focam-se na linguagem natural e na sua relação com a linguagem simbólica e defendem que os estudantes são capazes de adquirir algum conhecimento ou competências sobre a linguagem enquanto objecto mas não a usam como ferramenta semiótica para pensar sobre os problemas e para comunicar com os outros. Salientam, ainda, que os estudantes aplicam esquemas conversacionais de forma imprópria. Quando lidam especificamente com argumentação, os estudantes preferem argumentos apresentados em palavras, uma vez que os argumentos algébricos para justificar e explicar procedimentos de resolução de problemas são mais difíceis (Healy e Hoyles, 2000).

Arcavi (2003) identifica três funções que a visualização pode desempenhar no processo de aprendizagem: (a) suporte e ilustração de resultados essencialmente simbólicos (e possivelmente fornecer uma prova desses resultados), (b) uma forma possível de resolver conflitos entre soluções (correctas) simbólicas e intuições (incorrectas) e, (c) uma forma de ajudar a recuperar fundamentos conceptuais que podem ser facilmente contornados por soluções formais, para os problemas. Deste modo, a representação visual "já não está relacionada como propósitos ilustrativos apenas, mas também é reconhecida como uma componente chave do raciocínio, da resolução de problemas e até do processo de prova" (p. 235). O autor constata, ainda, que os alunos mostram-se reticentes quanto ao uso de estratégias gráficas, mesmo estando em posse de calculadoras gráficas e sabendo manipulá-las com desenvoltura. Estes resultados confirmam outros similares que salientam que os alunos ignoram o esboço do gráfico, procurando, quase sempre, a solução algébrica das questões (Eisenberg e Dreyfus, 1991; Knuth, 2000).

Há uma forma de representação que, por parecer simples e directa, é comum e frequente no ensino da Matemática – a tabela. Para Flores e Moretti (2005), usar tabelas no ensino não significa utilizá-las apenas para situações de comunicação. Deve-se possibilitar e privilegiar outras tarefas possíveis que não seja só a de leitura de tabelas, por exemplo, a própria construção de tabelas, a sua interpretação e preenchimento ou a compilação de dados ou informações para serem organizados noutra tabela. As tabelas não são representações autónomas, articulam-se de maneira explícita ou implícita, com outras representações. Esta articulação, que diz respeito à interacção entre a tabela e o enunciado verbal do problema ou a escrita algébrica, é essencial uma vez que é a mudança entre os registos que possibilita uma leitura global das representações gráficas e, em particular, das tabelas. A importância do uso de figuras, que representam situações matemáticas concretas, na resolução de problemas (o papel que desempenham para encontrar uma solução) é também fruto de reflexão em Flores e Moretti (2006).

Neste contexto, os estudantes universitários devem familiarizar-se com uma diversidade de representações e devem ser capazes de usar essas diferentes formas de representação, de forma flexível, na resolução de problemas de Matemática (AMATYC, 2006). De facto, o uso de diferentes representações depende da familiaridade dos estudantes com cada uma dessas representações (Boero et al., 2008). É fundamental que os professores promovam, nas salas de aula, o uso de diferentes formas de representação, através de actividades que ajudem os estudantes a desenvolver competências de representação e comunicação, fundamentais para estruturar o pensamento matemático e para transmitir os raciocínios de forma coerente e clara (MAA, 2004). Desta forma, os estudantes estarão expostos a diferentes representações dos conceitos matemáticos e como resultado, ganham flexibilidade em moverem-se entre essas diferentes representações e podem desenvolver profunda compreensão dos conceitos e reforçar a capacidade de resolver problemas (Even, 1998).

METODOLOGIA

Tendo em conta os objectivos definidos, este estudo segue uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa (Bogdan e Biklen, 1994), baseada em estudos de caso (Yin, 2003) e integrando uma vertente de experiência de ensino (Shulman, 1986).

A experiência de ensino é apoiada na realização de tarefas de investigação, durante o 1.º semestre do ano lectivo de 2008/09, na disciplina de Análise Numérica. Os participantes são os alunos do 2.º ano dos cursos ministrados na Escola Naval. Durante o 1.º ano, estes alunos obtiveram aproveitamento escolar em diversas disciplinas de Matemática (Análise Matemática I e II e Álgebra Linear) que utilizam o método tradicional de ensino, com aulas de exposição de teoremas e demonstrações com um grau de formalismo médio ou reduzido, seguidas de outras de resolução de exercícios, onde a tecnologia (por exemplo, a máquina de calcular) não é utilizada (nem permitida nas aulas ou em momentos de avaliação) como instrumento de trabalho.

A resolução de problemas e as tarefas de investigação partilham diversas características (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003). Ambas se referem a processos matemáticos complexos que requerem capacidades que se situam para além do cálculo e da memorização de definições e procedimentos e envolvem actividade fortemente problemática. Uma parte significativa das aulas do semestre é utilizada para a realização de quatro tarefas de investigação relacionadas com diversos tópicos programáticos da disciplina. Os alunos são confrontados com problemas para os quais não têm teoria nem modelo para fazerem um tratamento completo, pelo que são desafiados a desenvolver e defender as suas próprias estratégias. Durante a exploração das tarefas os alunos trabalham em pares ou em pequenos grupos. No final da exploração de cada tarefa, apresentam oralmente, à turma, o trabalho desenvolvido e são solicitados a escreverem um relatório (extra aula) onde explicam as estratégias que utilizaram e apresentam e justificam as suas conclusões. Deste modo, as tarefas de investigação promovem a comunicação, fornecem a base para a aprendizagem de conceitos e procedimentos da disciplina por parte dos alunos e permitem conhecer as suas estratégias de raciocínio. As restantes aulas contemplam exposições teóricas dos conteúdos programáticos, alguns dos quais trabalhados durante as tarefas de investigação e que são abordados, por exemplo, em Santos (2002) que é o manual adoptado para a disciplina e que serve também de instrumento de trabalho. Contemplam, ainda, oportunidades para a resolução de exercícios de aplicação e consolidação de conhecimentos.

A recolha de dados inclui a observação dos alunos na realização de tarefas de investigação, os seus relatórios escritos (designados por RT) e o registo áudio das entrevistas individuais realizadas aos alunos objecto de estudos de caso, após a exploração de cada tarefa (assinalados com E). As entrevistas são baseadas em questões que emergem da análise do material escrito produzido pelos alunos e o seu objectivo é compreender os seus processos de raciocínio e obter dados para clarificar ou confirmar aspectos que não podem ser claramente inferidos da exploração das tarefas.

Os resultados que se apresentam são relativos a três estudos de caso e a duas tarefas (ver enunciado em anexo). Para cada tarefa, são analisadas as diferentes representações usadas pelos alunos na sua exploração, a função que essas representações desempenham e o modo como são usadas. São também examinadas a mudança entre representações e o uso de múltiplas representações, uma vez que são estratégias usadas pelos estudantes de forma a resolver impasses no raciocínio e na resposta às questões das tarefas. As representações que os alunos apresentam são categorizadas, tendo por base os modos de representação de Duval (2006), como: (a) representações essencialmente discursivas (a linguagem natural e as notações simbólica e algébrica); e (b) representações essencialmente visuais (as representações gráficas e as tabelas).

O USO DE REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS PELOS ALUNOS

A análise do trabalho desenvolvido pelos três alunos na realização das tarefas investigativas propostas, mostra como seleccionam e utilizam as diversas representações matemáticas e as funções que desempenham na exploração dessas tarefas.

Tarefa 1

Os alunos começam por utilizar a linguagem natural para descrever e justificar o modo de formação das regras das operações com intervalos, como mostra os exemplos seguintes:

No caso da soma era fazer a soma coordenada a coordenada porque os dois extremos continham as somas. (Gonçalo, E1)

A subtracção… Pensei na operação inversa que foi introduzir o sinal negativo dentro do último intervalo e depois foi só somar utilizando a regra que tinha deduzido. (Luís, E1)

[Para a multiplicação] tinha que se multiplicar as várias combinações e depois escolher os maiores e os menores para fazer de extremos do intervalo final. (…). A divisão foi da mesma forma que a multiplicação. (Carlos, E1)

No entanto, os alunos parecem considerar a linguagem natural inadequada para justificar os seus raciocínios e, quando lhes é acessível, complementam a descrição anterior usando também o raciocínio dedutivo para obter estas regras, com base em propriedades matemáticas já conhecidas e recorrendo à manipulação algébrica:

$X = [x_1, x_2] \qquad Y = [y_1, y_2]$

$X - Y = X + (-Y) = [x_1, x_2] + (-[y_1, y_2]) = [x_1, x_2] + ([-y_2, -y_1]) =$

$= [x_1 - y_2, x_2 - y_1]$ (Luís, RT1)

Quando solicitados a generalizar as regras deduzidas, os alunos utilizam a notação simbólica e constroem expressões que formalizam as descrições informais:

Conseguimos concluir a seguinte regra:

$[x_1, x_2] * [y_1, y_2] = [\min C, \max C]$, em que C é o conjunto definido por $C = \{(x_1*y_1), (x_1*y_2), (x_2*y_1), (x_2*y_2)\}$.

Podemos deduzir para a divisão:

$X/Y = [x_1, x_2] / [y_1, y_2] = [\min C, \mathrm{Max}\, C]$, em que C é o conjunto definido por $C = \{(x_1/y_1), (x_1/y_2), (x_2/y_1), (x_2/y_2)\}$. (Carlos, E1)

Estas expressões apresentam-se, normalmente, incompletas pois os alunos não sentem necessidade de explicitar o domínio das variáveis utilizadas, apesar de conhecerem as limitações das regras (que referem várias vezes, por exemplo, no caso da divisão em relação ao zero). Luís é o único que inclui, de forma correcta, quantificadores na sua escrita simbólica:

$\forall_{X, Y} \in IR,\ X + Y = [x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$

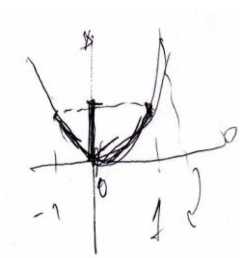
$\forall_{Y} \in IR \backslash \{0\},\quad X/Y = \dfrac{x_1, x_2}{y_1, y_2} = \left[\dfrac{x_1}{y_2}, \dfrac{x_2}{y_1}\right]$ (RT1)

Na questão seguinte, relacionada com funções, os alunos já utilizam diferentes abordagens. Carlos e Luís voltam a utilizar a manipulação algébrica e aplicam as regras deduzidas anteriormente para realizar cálculos, justificar raciocínios e deduzir expressões:

> $f: D \subset IR \rightarrow IR$, $f(x) = X + X$ com $X = [x_1, x_2] \subset D$
>
> $f([x_1, x_2]) = [x_1, x_2] + [x_1, x_2] = [x_1 + x_1, x_2 + x_2] = [2x_1, 2x_2] = 2[x_1, x_2]$
>
> Logo concluímos que $f(X) = X + X$ também pode ser escrito na forma $f(X) = 2X$. (Luís, RT1)
>
> $f(x) = [x_1, x_2] + [x_1, x_2] = [x_1+ x_1, x_2 + x_2]$, ou seja, $[2, 7]+[2, 7] = [4, 14]$
>
> $f(x) = 2[x_1, x_2] = [2x_1, 2x_2] = 2[2, 7] = [4, 14] = [x_1, x_2] + [x_1, x_2]$.
>
> Estas funções, a nível matemático são iguais. (Carlos, RT1)
>
> Para $f(X) = X^2$ teremos então $f(X) = X\times X$. Utilizamos a regra que deduzimos na questão anterior para fazer X vezes X. Como os intervalos são os mesmos, podemos escrever $f(X) = [X_1^2, X_2^2]$. (Luís, E1)

No caso da função $f(X) = X^2$, como não é monótona, a utilização dos métodos algébricos de representação não é adequada porque não permite detectar conflitos e erros na solução obtida. Como os alunos não usam outro tipo de representação que permita corrigir os resultados, as respostas obtidas com base na representação algébrica nem sempre estão correctas. Questionado posteriormente sobre a utilização da representação gráfica para obter a expressão da regra, Carlos é confrontado com resultados diferentes:

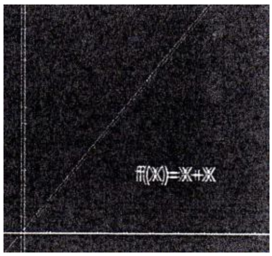
> Prof.: Qual seria a imagem do intervalo [-1,1] através desta função?
>
> Carlos: Iria ser de zero a 1. Ou seja, não são iguais. A parábola só está definida de zero para cima, logo não faz sentido termos -1. [Através de manipulação algébrica obteve [-1,1] * [-1,1] = [-1, 1]]



(Carlos, E1)

Apesar disso, não questiona a regra que aplica nem os cálculos que efectua e opta pela solução algébrica, na qual confia mais. A sua relutância em utilizar a representação gráfica nesta situação parece estar relacionada com a dificuldade na interpretação do gráfico: “Para mim é difícil imaginar um intervalo ao quadrado numa parábola, não consigo visualizar essa imagem…” (E1). O aluno também vê a construção da representação gráfica como uma tarefa mais complexa ou como desperdício de tempo: "[Aplico a regra] porque é mais fácil. Olhamos para aqui e o que é que vemos? X vezes X. Isto [alternativa gráfica] obriga a pensar…" (E1). Para deduzir a expressão f(X) = $e^X = [e^{x1}, e^{x2}]$, Carlos já usa uma estratégia baseada na representação gráfica da função exponencial e nas suas propriedades, provavelmente porque ao procurar outras estratégias para aplicar, entre os seus recursos, esta é a única disponível, como explica: "só analisámos o gráfico" (E1).

Gonçalo, nesta questão, recorre de imediato à representação gráfica das funções e utiliza-a, de forma correcta, quer para encontrar soluções, quer para confirmar os resultados dos cálculos que faz quando aplica as regras deduzidas anteriormente:



Concluímos que a imagem [do intervalo [2,7]] através da função é o intervalo [4,14] (…). Esta conclusão é corrobo-rada pois a imagem da função (ver grá-fico) vai ser o resultado da soma algé-brica do intervalo [2,7]. (RT1)

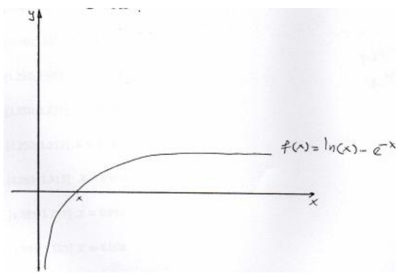
Para a função f(X) = X^2, o aluno refere: "Primariamente analisamos o gráfico da função e concluímos que não podíamos generalizar apenas uma expressão o resultado pretendido. Por isso dividimos a função nos vários tipos de intervalos possíveis e obtivemos as várias opções (…)" (E1). A utilização da representação gráfica, neste caso, facilita a identificação de propriedades das funções (por exemplo, a monotonia) que são fundamentais para o aluno obter a resposta correcta. Também é interessante verificar que o aluno é capaz de relacionar as representações algébricas das funções com as suas representações gráficas e tirar partido dessa relação para obter e confirmar resultados.

Tarefa 2

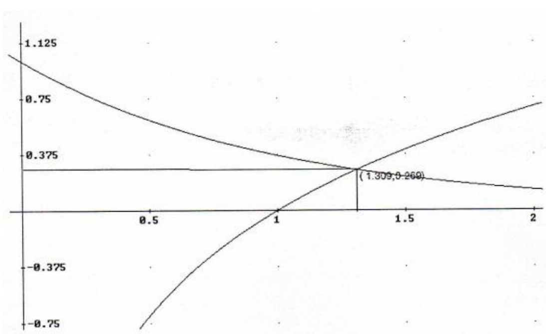
A primeira opção dos alunos para tentar resolver a equação não linear $f(x)=\ln(x)-e^{-x}$, é a utilização de manipulação algébrica. No entanto, não são bem sucedidos, como clarifica Luís: "Não consegui isolar totalmente a variável *x* de modo a obter um valor para esta variável" (E2). A resolução de equações não lineares só faz parte dos programas de Matemática a nível superior, excepto alguns casos em que a sua resolução pode ser realizada através da aplicação de manipulação algébrica (por exemplo, decomposição de polinómios, usando casos notáveis ou a lei do anulamento do produto). Assim, a opção dos alunos parece estar relacionada com a sua experiência escolar em que a resolução de equações se faz, maioritariamente, através de manipulação algébrica, como evidencia Gonçalo: “Na primeira tentativa, tentámos resolver como antigamente [refere-se à resolução analítica de equações através de manipulação algébrica] mas não conseguimos chegar a nenhum valor” (E1).

Os alunos optam então pela resolução aproximada da equação com base na representação gráfica, recorrendo à máquina de calcular, como refere Luís: “Visto que a equação (…) apresenta vários problemas na determinação das suas raízes, pensamos em dar solução à mesma recorrendo à representação gráfica” (E2). Nesta altura, as estratégias usadas são essencialmente de dois tipos, apresentadas nas figuras seguintes. Numa estratégia, Luís introduz a expressão algébrica da função na máquina de calcular e procura a intersecção do seu gráfico com o eixo das abcissas. Carlos e Gonçalo optam por outra estratégia em que transformam a equação dada no enunciado numa outra equivalente, através de manipulação algébrica, e representam as duas funções que compõem a equação. Em qualquer das estratégias, os alunos descrevem e justificam, de forma correcta e em linguagem natural, o processo de obtenção da solução através destas representações gráficas:

Dada uma função f(x), os seus zeros são as raízes da equação f(x) = 0. Sendo assim, os zeros da função são as abcissas dos pontos em que o gráfico da função intersecta o eixo das abcissas (eixo dos xx). (Luís, RT2)



Ao igualarmos a nossa função a zero, temos que ln(x) = e-x. O valor que procuramos trata-se do x para o qual as duas funções são iguais. Então fizemos o traçado do gráfico das duas funções para ver qual o valor de x no qual se dava a intersecção. (Gonçalo, E2)



Os alunos interpretam correctamente os resultados obtidos graficamente e mostram, assim, facilidade em relacionar a representação algébrica da função e a sua representação gráfica.

Carlos parece considerar a representação gráfica pouco fiável ou adequada e utiliza, igualmente uma tabela para o auxiliar a encontrar o valor aproximado da solução da equação. Na tabela que constrói usa, novamente, a decomposição da função em duas e procura encontrar o ponto de intersecção entre elas, através da análise dos seus valores, como justifica na descrição, em linguagem natural, que acompanha a tabela:

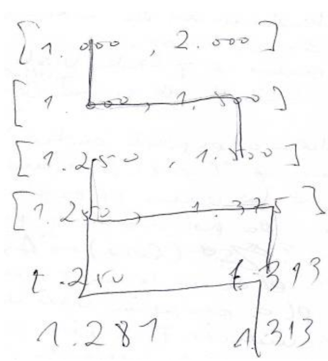
Podemos criar uma tabela com o objectivo de atribuir valores a x em ln(x) e em e^{-x} para nos aproximar do valor da raiz, concluindo que se encontrava entre x = 1 e x = 3/2 (…) porque é quando o valor da função logarítmica é maior que a exponencial.

x	**ln(x)**	e^{-x}
0	n.d.	1
1/2	-0,6931	0,6065
1	0	0,3679
3/2	0,4055	0,2231

(E2)

Assim, a tabela construída pelo aluno é utilizada, não só para apresentar e organizar dados, mas como base para a realização de inferências sobre a existência de relações não conhecidas. Neste caso, esta forma de representação articula-se, explicitamente, com as representações gráfica e algébrica a partir das quais é construída, verificando-se uma tradução entre registos.

Na sequência de intervalos apresentada na questão seguinte, os alunos tentam identificar padrões mas utilizam diversas representações, como os apresentados nas figuras seguintes. A representação que Carlos utiliza é mais visual, a que chama 'método da cadeira'pela semelhança deste objecto com os traços apresentados. Gonçalo utiliza um esquema mais numérico, com símbolos de mais e menos para indicar as alterações ocorridas na referida sequência.



1 – [1.000 2.000] -

2 – [1.000 1.500] +

3 – [1.250 1.500] -

4 – [1.250 1.375] - (…)

(Carlos, E2)

> Observamos que quando ocorriam alterações no extremo superior, se tratava deste ser reduzido, no caso do extremo inferior, se ocorresse alteração, estes seriam aumenta-dos. (Gonçalo, RT2)

Estas representações são utilizadas pelos alunos para explorar padrões e obter compreensão sobre propriedades importantes dos elementos da sequência. No entanto, depois de identificarem o padrão utilizam, mais uma vez, a linguagem natural para descrever o modo de formação dos elementos da sequência, como se pode observar no exemplo seguinte de um excerto da entrevista com Luís:

> A amplitude dos intervalos vai diminuindo para metade relativamente ao intervalo anterior. Também vimos que o limite superior e o limite inferior alteravam, de três em três intervalos, o inferior e de dois em dois o superior (…). Nestes três em que se mantinha o limite superior, era sempre o limite inferior que ia diminuir. Três vezes. Depois alterava e passava a ser o limite superior, duas vezes. (…) A amplitude do próximo intervalo é encontrada através da soma da amplitude ao valor mínimo (a) ou da subtracção ao valor máximo (b) (…). (E2)

Quando solicitados a generalizar a lei de formação deduzida, os alunos, numa tentativa de formalização, utilizam um misto de linguagem natural e simbólica que nem sempre traduz, de forma adequada, o que é correctamente descrito anteriormente:

> A partir do que foi dito anteriormente podemos definir a seguinte regra: Se x - max > (f(x) = 0), então o intervalo seguinte será [min, x - max] ou [x + min, max] se e só se x - max < (f(x) = 0). (Luís, RT2)

> Como regra geral (…) temos o intervalo [a, b] com $v_{méd} = (a+b)/2$. Fazemos os seguintes passos:
>
> 1.º Encontrar o valor médio $v_{méd} = (a+b)/2$
>
> 2.º Encontrar $f(v_{méd})$
>
> Se $f(v_{méd})>0$ então (…) o intervalo seguinte é $[a, v_{méd}]$
>
> Se $f(v_{méd})<0$ então (…) o intervalo seguinte é $[v_{méd},b]$ (Gonçalo, RT2)

Para resolver a equação proposta no final desta tarefa, que identificam correctamente como não linear, por analogia com a primeira questão, os alunos optam novamente pela manipulação algébrica, apesar de conhecerem e terem à sua disposição outras estratégias mais eficientes: “É exactamente o mesmo problema, tentámos isolar a variável e não conseguimos” (Luís, E2). Este comportamento é normal, se atendermos à já referida experiência escolar dos alunos na resolução de equações.

Carlos e Luís optam, então, por resolver a equação com base na representação gráfica e descrevem o processo em linguagem natural, à semelhança do que acontece na primeira questão: “Como não nos foi possível resolver analiticamente, tentamos abordar de forma visual. (…) Calculamos a intersecção das duas funções e o ponto de intersecção obtido foi t = 25,942393” (Carlos, RT2).

Gonçalo prefere utilizar, de forma correcta mas menos eficiente, o algoritmo que deduz na questão anterior. Para isso constrói uma tabela, como a do exemplo seguinte, onde apresenta os cálculos que efectua durante a exploração da tarefa, de forma organizada e que serve também para os auxiliar:

Efectuamos os seguintes cálculos para nos aproximarmos do valor de t:

[25.000, 59.702]	$\Delta x/2 = 17.351$	$t_{med} = 42.351$
[25.000, 42.351]	$\Delta x/2 = 8.338$	$t_{med} = 29.336$
(…)	(…)	(…)

(RT2)

A opção por este modo de representação para apresentar e facilitar os cálculos, pode estar relacionada com a familiarização de procedimentos. De facto, nos manuais de Análise Numérica é usual a utilização deste tipo de tabela para exemplificar a aplicação de métodos recursivos e os alunos têm por hábito adoptá-la quando resolvem exercícios na sala de aula.

CONCLUSÕES

Da análise dos resultados destaca-se, como aspecto significativo, a variedade de representações que os alunos utilizam, associadas às diferentes funções que desempenham na exploração das tarefas de investigação propostas.

Os alunos têm tendência para privilegiar a representação algébrica na exploração das tarefas de investigação, mesmo quando conhecem e têm à sua disposição outras representações que permitem abordagens mais eficientes. Este comportamento parece ser induzido pela prática escolar dos alunos uma vez que seleccionam este modo de representação quando pretendem deduzir regras e encontrar soluções. No entanto, a representação algébrica nem sempre é adequada porque não permite detectar conflitos e erros na solução obtida nem identificar padrões no comportamento de valores numéricos que facilitem a selecção de métodos de resolução mais eficientes. Como os alunos não usam, habitualmente, outro tipo de representação que permita corrigir os resultados, as respostas obtidas com base na representação algébrica nem sempre estão correctas. Só quando este modo de representação não permite encontrar soluções ou quando são solicitados a apresentar estratégias alternativas é que recorrem a outras representações.

Os resultados do estudo mostram que apenas um dos casos (Gonçalo) escolhe, naturalmente, comunicar as suas estratégias de resolução no modo gráfico. Nos outros casos, a representação gráfica só surge quando explicitamente solicitada ou quando os alunos não têm disponíveis, entre os seus recursos, outras representações para usar. A falta de prática em níveis educativos anteriores e a crença que o uso de representações gráficas constitui um raciocínio pouco formal, matematicamente inaceitável no ensino superior, são alguns factores que podem estar na origem desta tendência. De forma geral, os alunos usam a representação gráfica para obter soluções, explicar raciocínios e verificar resultados e, raramente, para planearem e seleccionarem as suas estratégias. Contudo, a sua utilização é, maioritariamente, adequada às questões e os resultados apresentam-se quase sempre correctos. Verifica-se, também, que os alunos são capazes de relacionar este modo de representação gráfico com outras representações, como as algébricas e as tabelares.

A tabela é outra representação que os alunos utilizam, com alguma frequência, para organizar e apresentar dados e resultados de cálculos. O objectivo deste modo de representação parece ser facilitar, por um lado, a identificação da informação necessária à realização de cálculos e a própria execução desses cálculos e, por outro, realizar inferências sobre a existência de relações desconhecidas. Embora mostrem facilidade na sua utilização, nalgumas situações os alunos constroem as suas tabelas à semelhança das que surgem nos livros de texto da disciplina e que utilizam na resolução de exercícios na sala de aula, pelo que a escolha deste tipo de representação pode estar a ser induzida pela experiência escolar do aluno.

Das outras duas tarefas deste estudo, cuja exploração não é possível apresentar por limitações de espaço, há apenas a referir que os alunos usam figuras geométricas quando outro tipo de representação não permite obter soluções. Na tarefa 4 os alunos recorrem a este modo de representação e utilizam-no para visualizar a informação disponível e auxiliar nas decisões estratégicas e para mostrar e justificar os seus raciocínios e processos de cálculo. Os alunos ainda são capazes de identificar as limitações associadas à utilização de determinadas figuras e de seleccionar as mais adequadas para permitir a obtenção de soluções mais exactas.

As respostas dos alunos, durante a realização das tarefas de investigação, são essencialmente descritivas, usando a linguagem natural. Os alunos utilizam este modo de representação em todas as tarefas, para descrever e justificar os seus raciocínios e os processos de obtenção de soluções, mesmo quando estas são obtidas com base nas outras representações já referidas. Quando solicitados a generalizar os resultados ou a formalizar as suas respostas, os alunos recorrem a um misto de linguagem natural e simbólica, isto é, continuam a usar a linguagem natural mas complementam-na com alguma notação simbólica. É ainda de realçar o facto de, só um caso (Luís), incluir os quantificadores matemáticos na notação simbólica que usa. A utilização de notação simbólica parece ser, assim, uma das dificuldades que emergem da actividade matemática deste alunos, uma vez que as expressões simbólicas que apresentam, nem sempre traduzem aquilo que descrevem informalmente.

Finalmente, os resultados relativos aos casos apresentados apoiam a ideia que as representações matemáticas são um recurso poderoso para a comunicação do raciocínio matemático. Por isso, e tal como sugerem os documentos oficiais (AMATYC, 2006; NCTM, 2000) devem ser dadas oportunidades aos estudantes para ganhar experiência no uso de diversas representações matemáticas e estabelecerem ligações entre elas. Os resultados parecem indicar, também, que a realização das tarefas de investigação propostas, integradas no processo de ensino e aprendizagem da Análise Numérica cumprem esse propósito.

REFERÊNCIAS

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*(3), 183-198.

American Mathematical Association of Two-Year Colleges (2006). *Professional standards*. Retirado de www.missioncollege.org/depts/maths/hobbs/standars.html em 09/12/2009.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G. Vale, I., e Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Boero, P., Douek, N., e Ferrari, P. L. (2008). Developing mastery of natural language. In L. D. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman, e D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 262-295). New York, Ny: Routledge.

Bogdan, R., e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Smith-Reed, B., e Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal, 34*(4), 663-689.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Eisenberg, T., e Dreyfus, T.(1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann, e S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37). Washington, DC: MAA.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous A., e Gagatsis, A. (2007), Relations between secondary Pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 533-556.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 17(1)*, 105-121.

Flores, C., e Moretti, M. (2005). *O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: Ponto de análise para aprendizagem Matemática*. Reunião Anual da ANPEd, GT19: Educação Matemática. Retirado de http://www.anped.org.br/28/textos/gt19/gt19736int.pdf. em 4/12/2009.

Flores, C., e Moretti, M. (2006). As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. *REVEMAT - Revista Electrónica de Educação Matemática, 5*, 5 -13. Retirado de www.redemat.mtm.ufsc.br/revemat/2006_pdf/revista_2005_01_completo.pdf em 4/12/2009.

Gagatsis, A., e Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International research in mathematics education* (pp.197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum .

Greeno, J. G., e Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78*(5), 361-367.

Healy, L. e Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in Algebra. *Journal forResearch in Mathematics Education*, *31*, 396-428.

Knuth, E. J. (2000). Understanding connections between equations and graphs. *Mathematics Teacher,* 93(1).

Mathematical Association of America (2003). *Guidelines for programs and departments in undergraduate mathematical sciences*. Retirado em 03-Nov-2008, de http://www.maa.org/guidelines/guidelines.html.

Mathematical Association of America (2004). *Undergraduate programs and courses in the mathematical sciences: CUPM curriculum guide 2004*. Retirado em 03-Nov-2008, de http://www.maa.org/cupm/cupm2004.pdf.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Neria, D., e Amit, M. (2004). Students preference of non-algebraic representations in mathematical communication. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 409-416). Bergen, Norway: PME.

Ponte J. P., Brocardo J., e Oliveira H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Santos, F. C. (2002). *Fundamentos de Análise Numérica*. Lisboa: Sílabo.

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 3-36). New York, NY: Macmillan.

Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods* (3ª ed.). London: Sage.

ANEXO – TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO

Tarefa 1: Intervalando

1. Observe as seguintes situações

[1, 2] + [5, 7] = [6, 9]   [0, 1] + [-5, 2] = [-5, 3]   [-3, -1] + [1, 3] = [-2, 2]

a) O que pode dizer sobre o resultado de [-2,-1]+[-5,-1]? Explique como chegou a essa conclusão.

b) Será possível deduzir uma regra que permita determinar a soma de dois intervalos de valores reais? Todos os intervalos de valores reais seguem esta regra? Investigue.

c) Investigue se a regra deduzida poderá ser utilizada para outras operações com intervalos, por exemplo, a subtracção (X–Y), a multiplicação (x×y) e a divisão (x/y). Em caso negativo, deduza novas regras para essas operações.

2. Considere a função f: $D\subset IR\rightarrow IR$, real de variável real, definida por f(X) = x + x e $X = [x_1, x_2] \subset D$, um intervalo de valores reais pertencente ao seu domínio.

a) Se X = [2, 7], qual a sua imagem através da função f? Explique como chegou a essa conclusão.

b) O que poderia afirmar na alínea anterior se a função f passar a ser definida por f(X) = 2x?

c) O que pode concluir sobre a imagem de um intervalo real qualquer, se a função f passar a ser definida por f (X) = x^2 ou por f (X) = e^x?

Tarefa 2: Equacionando

1. Considere a função f (x) = ln (x) - e^{-x}. Como resolve a equação f (x) = 0?

2. Observe a seguinte sequência de intervalos de valores reais contendo a raiz de f,

[1.000, 2.000]
[1.000, 1.500]
[1.250, 1.500]
[1.250, 1.375]
[1.250, 1.313]
[1.281, 1.313]

a) Qual será o próximo elemento da sequência? Explique como chegou a essa conclusão.

b) Encontre uma regra geral para construir qualquer elemento da sequência apresentada?

3. A velocidade de lançamento de um míssil a partir de um submarino é calculada através da fórmula $v = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$, onde v é a velocidade de lançamento na vertical, u é a velocidade de saída do combustível relativamente ao míssil, mo é a massa inicial do míssil (t = 0), q é a taxa de consumo do combustível, g = 9.8 m/s2 a aceleração da gravidade. Sabendo que u = 2200 m/s, mo= 160000 Kg e q = 2680 Kg/s, ao fim de quanto tempo é atingida a velocidade de 1000 m/s?

Comunicação e representações na aprendizagem dos números racionais no 5.º ano de escolaridade

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
Marisa Quaresma
Escola Básica 2,3 de Poceirão, Palmela
Maria João Costa
Escola Básica 2,3 de Alapraia, Cascais

RESUMO

Este artigo debruça-se sobre a compreensão dos números racionais dos alunos do 5.º ano do ensino básico, tendo em atenção o modo como usam as representações em especial a verbal e a simbólica (de fracção). O desenvolvimento da capacidade de comunicação dos alunos constitui um objectivo curricular importante da disciplina de Matemática, permitindo o desenvolvimento dos significados matemáticos por parte dos alunos e a sua compreensão dos conceitos. A comunicação apoia-se no uso de linguagem oral e escrita e esta remete para o uso de várias representações, essenciais na Matemática escolar. O estudo tem por base a observação participante de um grupo de alunos realizada por dois investigadores, um dos quais a professora de Matemática da turma. A recolha de dados envolveu observação directa, registo vídeo e recolha de documentos produzidos pelos alunos. Os resultados mostram que os alunos conseguem interpretar a representação simbólica de operadores fraccionários como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ mas têm muita dificuldade ou não sabem mesmo como exprimir estes operadores em termos verbais. Esta dificuldade limita seriamente a sua compreensão dos números racionais, levando-os a desenvolver um significado essencialmente numérico, ligado à ideia de divisão, vendo uma fracção como a indicação de uma "conta" que é necessário fazer. O estudo sugere, por isso, a necessidade de trabalhar de forma integrada, não só as representações fracção e decimal, mas também as representações verbal e pictórica.

O novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* encara a comunicação como uma capacidade transversal desta disciplina. Para o programa, a "comunicação envolve as vertentes oral e escrita, incluindo o domínio progressivo da linguagem simbólica própria da Matemática" (ME, 2007, p. 8). A representação é considerada como uma das vertentes da comunicação, envolvendo objectivos de aprendizagem como "interpretar a informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas" e "representar informação e ideias matemáticas de diversas formas" (ME, 2007, p. 47). Este artigo debruça-se sobre a compreensão que os alunos do 5.º ano do ensino básico revelam sobre os números racionais, tendo em atenção os seus processos de comunicação e o modo como usam as representações verbal e simbólica (de fracção).

É usual distinguir diversos significados (ou subconstructos) de número racional. Por exemplo, Lamon (2001) e Charalambous e Pitta-Pantazi (2007) referem os seguintes: (i) *parte-todo* – um certo objecto (todo) está dividido em partes iguais, das quais são consideradas várias partes – significado fundamental, essencial para a compreensão dos restantes; (ii) *razão* – compara duas quantidades da mesma natureza ou de natureza distinta; (iii) *operador* – transforma o cardinal de um conjunto discreto e pode ser partitivo ou multiplicativo-partitivo; (iv) quociente – refere-se a uma situação de divisão, ou seja, a fracção $\frac{x}{y}$ indica o valor que se obtém quando x é dividido por y, sendo x e y números inteiros (Kieran, 1993); e (v) *medida* – compara uma grandeza com outra tomada como unidade (Monteiro e Pinto, 2005). Neste artigo são analisadas tarefas que envolvem os significados parte-todo e operador.

COMUNICAÇÃO E REPRESENTAÇÕES NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA ESCOLAR

O desenvolvimento da capacidade de comunicação (oral e escrita) dos alunos constitui um objectivo curricular importante da disciplina de Matemática. A linguagem oral, estreitamente associada à linguagem corporal, serve de suporte ao pensamento, tendo um papel essencial no ensino-aprendizagem da Matemática a nível escolar. A linguagem escrita, incluindo todo o tipo de registos simbólicos, pictóricos e geométricos, assume também grande importância no ensino-aprendizagem desta disciplina. A utilização das linguagens oral e escrita não só permite aos alunos falar dos objectos e noções matemáticos, mas permite-lhes igualmente reflectirem sobre a sua compreensão da Matemática, ajudando-os a fazer conexões e a clarificar conceitos (ME, 2007).

Quando os alunos comunicam matematicamente, recordam, compreendem e usam conhecimentos anteriores e desenvolvem novos conhecimentos. Interagindo com os outros, alargam e aprofundam assim o seu conhecimento matemático (Ponte e Serrazina, 2000). Cabe ao professor incentivá-los a clarificar os conceitos através da comunicação, promovendo a negociação oral de significados e o registo escrito das suas estratégias de resolução de problemas, uma vez que estes registos ajudam a precisar as ideias e servem de apoio à reflexão e ao aprofundamento dos conceitos.

A comunicação tem um papel essencial para que os alunos possam compreender os conceitos e atribuir-lhes significados matemáticos. A construção de significados matemáticos evolui por etapas sucessivas, através da sua expressão de forma oral ou escrita, pelos alunos, regulada pelo professor. Para que tal aconteça, é necessário que estes se sintam à vontade para intervir e também que saibam auto-regular-se para intervir a propósito e de forma adequada. Os significados matemáticos emergem das conexões entre as ideias matemáticas em discussão e os outros conhecimentos pessoais do aluno. Como referem Bishop e Goffree (1986), as novas ideias são significativas na medida que o aluno é capaz de fazer conexões com outras ideias matemáticas e com outros aspectos do seu conhecimento pessoal.

O professor e os alunos têm de negociar os diferentes significados, justificando as suas ideias matemáticas com vista à construção de um significado socialmente partilhado e compreendido por todos. Neste sentido, os significados matemáticos não existem por si mas são gerados durante o processo de comunicação e interacção social. Por isso, no processo de construção do conhecimento matemático é fundamental que os alunos possam dispor de momentos em que se exprimem com grande liberdade, sem se sentirem constrangidos pela observação do professor ou pelo olhar colectivo de toda a turma. Essa é, indiscutivelmente, uma das grandes virtualidades do trabalho em pequeno grupo.

A comunicação apoia-se assim no uso de linguagem oral e escrita e esta remete para o uso de várias representações. Segundo o NCTM (2007), algumas formas de representação – tais como diagramas, gráficos e expressões simbólicas – são essenciais na Matemática escolar. Este documento critica o facto destas representações serem ensinadas e aprendidas, na maior parte das vezes, como se fossem um fim em si mesmas, o que limita o seu poder e utilidade como instrumento de aprendizagem da Matemática.

Para Goldin (2000), uma representação é uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objectos que podem de alguma maneira significar ou "representar" algo. Por exemplo, um algarismo é um símbolo que se refere a um número associado, por exemplo, a conjunto concreto de objectos. Tanto os algarismos como os gráficos são exemplos de representações concretas e estáticas. São representações externas – que podem ser encontradas em manuais ou produzidas por professores e alunos. Para este autor, as representações raramente têm significado sozinhas – têm que ser compreendidas no quadro de um dado sistema. É o que acontece, por exemplo, com as representações das fracções e dos numerais decimais, assim como dos próprios números naturais no sistema decimal de posição.

Representar um número significa atribuir-lhe uma designação, devendo os alunos compreender que, para um dado número, podem existir não apenas uma mas sim várias designações. Como refere o NCTM (2007), os números racionais podem ser representados de diferentes formas – verbal-pictórica, fraccionária, decimal, geométrica e percentagem – que os alunos devem compreender de modo a desenvolverem a sua capacidade de raciocínio e de resolução de problemas.

Relativamente à representação verbal, Streefland (1991) refere a importância de trabalhar as fracções partindo dos seus nomes (metade, um terço, um quarto, etc.). Usualmente, os alunos começam por resolver questões envolvendo um misto de representações verbais e pictóricas (desenhos ou esquemas). Na resolução de tarefas, estes esquemas servem de base a estratégias que permitem a ligação entre a interpretação da informação do enunciado e a respectiva solução.

Monteiro e Pinto (2007) apontam alguns mal entendidos que os alunos apresentam na sua compreensão dos numerais decimais: (i) confundir décimas e centésimas, por exemplo, 2,5 e 2,05; (ii) considerar que 1,456 é maior que 1,5; e (iii) pensar que entre 0,1 e 0,2 não existem números racionais. As mesmas autoras referem que os erros onde intervêm fracções são igualmente muito comuns. Por exemplo: (i) considerar que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, "porque 4 é maior que 3"; (ii) referir que $\frac{1}{2}$= 1,2; e (iii) não conceptualizar a unidade.

Em relação à representação geométrica, Goldin e Shteingold (2001) referem que o recurso à recta numérica é importante pois permite destacar facilmente as relações de ordem. Para Monteiro e Pinto (2007) esta representação é um recurso didáctico importante na medida em que permite evidenciar a densidade dos números racionais.

A percentagem é uma forma de representação importante, dada a sua presença no dia-a-dia dos alunos. Baseados em múltiplas investigações Parker e Leinhardt (1995) referem que as dificuldades dos alunos incluem: (i) a compreensão do símbolo %; (ii) convertendo incorrectamente decimais em percentagens e vice-versa (por exemplo, transformando 150% em 0,150 ou 0,8 em 8%); (iii) o cálculo incorrecto de percentagem de uma parte de um todo (por exemplo escrevendo que 60 = 50% de 30); e (iv) o cálculo de percentagens maiores que 100.

Segundo Owens (1993), a representação decimal e a fracção devem surgir em simultâneo para que o aluno compreenda que ambas traduzem a mesma situação e pertencem ao mesmo conjunto de números. Uma ideia semelhante é assumida no novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007):

> As representações fraccionária e decimal dos números racionais surgem agora em paralelo. Em cada situação o aluno deve ser capaz de usar a representação mais adequada, mas deve igualmente ser capaz de passar com facilidade de uma representação para a outra. (p. 7)

Isto representa uma mudança considerável em relação ao programa anterior de Matemática do 1.º ciclo português (ME, 1990) no qual a primeira representação que surgia de número racional era a de numeral decimal. A representação em fracção surgia apenas associada ao significado operador, sendo trabalhada nos casos simples de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$… mas, geralmente sem fazer uma ligação natural entre as representações em fracção e decimal. No entanto, não existe uma ideia clara das aprendizagens efectivamente realizadas pelos alunos, quer no trabalho com numerais decimais, quer no trabalho com fracções como operadores, quer ainda na capacidade de estabelecer conexões entre as duas representações.

O novo programa (ME, 2007) indica como objectivos gerais de aprendizagem para o 1.º ciclo, no campo dos Números e operações, que os alunos sejam capazes de operar com números racionais não negativos na representação de numeral decimal. Este programa aponta que:

> Os números racionais começam a ser trabalhados nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fracção nos casos mais simples e é nos 3.º e 4.º anos que o estudo destes números vai ser aprofundado, quer recorrendo a problemas que permitam trabalhar outros significados das fracções, quer introduzindo números representados na forma decimal (usualmente designados por números decimais) a partir de situações de partilha equitativa ou de medida, refinando a unidade de medida. (p. 15)

O programa (ME, 2007) sugere que se use o contexto do dinheiro, como propício para trabalhar a representação decimal dos números racionais, dada a relação entre o euro e o cêntimo. Indica, ainda, que no 1.º ciclo, o trabalho com os números racionais deve incluir a exploração de situações que, de uma forma intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e de proporção.

Para Lamon (2001), cada significado tem o seu conjunto de representações e operações, ou seja, cada modo de representação captura algumas – mas não todas – as características dos números racionais. Mesmo dentro de um modelo de representação – por exemplo, o modelo pictórico – podem haver variações do significado, dependendo se os objectos são contínuos ou discretos, se são objectos unitários ou compostos, etc.

A maior ou menor facilidade em lidar com diferentes representações dos números racionais liga-se com o “sentido de número”:

> A compreensão geral que uma pessoa tem dos números e das operações, juntamente com a destreza e predisposição para usar essa compreensão de modo flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações. Reflectindo-se na tendência e na capacidade para usar os números e os métodos quantitativos como meio de comunicação, processamento e interpretação de informações. (McIntosh, Reys e Reys, 1992, p. 3)

McIntosh et al. (1992) consideram que o sentido do número é algo pessoal e relaciona-se com as ideias que cada um desenvolve sobre os números e com o modo como essas ideias se relacionam entre si e com outras ideias. Para estes autores a aquisição do sentido do número é algo gradual, começando muito antes de iniciar a educação formal.

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Uma vez que se pretende estudar um fenómeno ligado à comunicação e compreensão de conceitos matemáticos, optou-se por uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan e Biklen, 1994). O estudo tem por base observação participante (Jorgensen, 1989) uma vez que esta metodologia permite uma relação muito próxima do investigador com o objecto de estudo, no seu contexto natural. Assim, optou-se pela observação de um grupo de três alunos, observação que foi realizada por dois investigadores, um dos quais a professora de Matemática da turma.

Esta professora é também a directora de turma e professora de Ciências da Natureza, Estudo Acompanhado e Formação Cívica, tendo portanto um forte contacto semanal com os alunos. A turma é composta por 22 alunos, 9 raparigas e 13 rapazes, com idades compreendidas entre os 10 e os 12 anos de idade (a maioria com 10 anos), 6 dos quais já reprovaram em anos anteriores. É uma turma que revela falta de hábitos e métodos de trabalho, nomeadamente em pares. É receptiva a novos tipos de tarefa e mantém um ritmo de trabalho equilibrado. Os alunos provêm de famílias de classe socioeconómica média ou média-baixa e os encarregados de educação, na sua maioria, têm como habilitações académicas o 2.º ou 3.º ciclo e, mais raramente, o ensino secundário. A escola está inserida num meio rural muito disperso e todos os alunos são de pequenas localidades próximas, deslocando-se diariamente de transporte público ou por meios próprios para a escola.

Tendo em conta as informações já detidas pela professora, os alunos que formavam o grupo observado foram seleccionados de modo a terem diferente aproveitamento escolar e apresentarem uma razoável capacidade de expressão oral e escrita (comunicação). Assim, Amélia é uma aluna empenhada e interessada, que os colegas reconhecem como "a melhor da turma" Revela um enorme gosto pela escola, sendo sua brincadeira preferida "ser professora". Diz que em casa "ensina" diariamente à avó o que aprende na escola. É atenta e organizada, tem facilidade em expressar-se oralmente e por escrito, e gosta de apresentar as suas ideais. Tem espírito de líder, mas geralmente só o exerce no pequeno grupo. César revela grande responsabilidade no que diz respeito ao seu comportamento e aproveitamento escolar. No 1.º ciclo, ficou retido um ano, devido as dificuldades de concentração e de aprendizagem, tendo-lhe sido diagnosticada hiperactividade e desde então é medicado diariamente. Quer ter boas notas e trabalha para isso, sendo um aluno organizado, que se esforça por estar atento mas distrai-se com facilidade. Revela dificuldade em expressar-se, especialmente por escrito, mas gosta de participar e de apresentar as suas ideais. Finalmente, Daniel está a repetir o 5.º ano, tendo ficado retido no ano anterior devido à falta de empenho e trabalho e também ao seu comportamento. Este ano disse que estava arrependido e que queria uma nova oportunidade e, até ao momento, tem-se esforçado e empenhado.

Apesar da sua falta de assiduidade, no final do 1.º período tinha conseguido melhorar os seus resultados. Distrai-se com facilidade e tem dificuldade em organizar os seus materiais, mas gosta de participar e de apresentar as suas ideias, tendo mais facilidade em expressar-se oralmente do que por escrito. Tem espírito de líder e os colegas reconhecem-lhe esse estatuto.

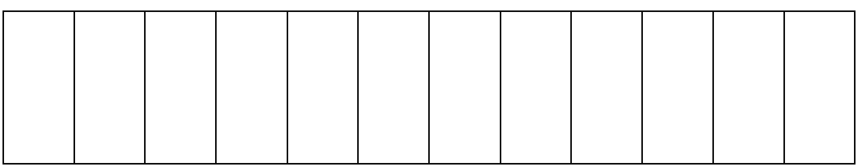
As tarefas usadas na aula foram escolhidas para servir de diagnóstico relativamente à compreensão que os alunos do 5.º ano têm dos números racionais. Os alunos trabalharam em grupo durante cerca de metade do tempo e na outra metade realizou-se a discussão das tarefas em grande grupo. No presente artigo, por constrangimentos de espaço, discutimos apenas duas das seis tarefas realizadas pelo grupo.

Toda a aula foi registada em vídeo, mas durante o tempo em que os alunos trabalharam em grupo, apenas foi filmado o trabalho de Amélia, César e Daniel. O grupo foi também observado directamente pelo segundo investigador presente na aula e pela própria professora quando interagiu com ele. Foram também recolhidas as produções escritas destes alunos. Posteriormente, procedeu-se à transcrição integral da aula. A análise dos dados começou por identificar os principais segmentos na resolução de cada uma das seis tarefas, notando eventos marcantes no que respeita à compreensão dos números racionais e à comunicação. Os aspectos menos claros no desempenho dos alunos deram origem a novas observações do registo vídeo. Finalmente, seleccionámos diversos episódios que considerámos particularmente relevantes relativamente ao conhecimento da linguagem verbal e simbólica das fracções e também ao seu conceito de explicação matemática, e que analisamos neste artigo.

AS TAREFAS E A INTERPRETAÇÃO QUE DELAS FAZEM OS ALUNOS

Problema 1

A avó do Luís deu-lhe um chocolate como aquele que mostra a figura. O Luís decidiu dar $\frac{1}{4}$ do chocolate ao seu amigo Rodrigo. Assinala a sombreado a parte do chocolate que o Luís de ao Rodrigo.



Problema 2

A Maria tem 60 bombons que quer partilhar com alguns colegas. Deu $\frac{1}{2}$ aos colegas da natação e $\frac{1}{3}$ aos colegas da turma.

a) Quantos bombons deu a Maria aos colegas da natação?

b) E aos colegas da turma?

c) Quantos bombons sobraram à Maria?

O problema 1 corresponde a uma situação contextualizada, envolvendo uma grandeza contínua (barra de chocolate), que se apresenta dividida em doze partes (e, portanto, discretizada). A informação é dada em linguagem verbal com elementos simbólicos ($\frac{1}{4}$) e pictóricos e a resposta é pedida em termos pictóricos. O problema 2, pelo seu lado, corresponde a uma situação contextualizada, envolvendo uma grandeza discreta (número de bombons). A informação é dada em linguagem verbal com elementos simbólicos ($\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$), cada uma das três alíneas pede uma resposta numérica, requerendo a última alínea a combinação de diversas informações para produzir a resposta.

Amélia e Daniel não evidenciam dificuldade na interpretação do enunciado do problema 1. César, contudo, revela algumas dificuldades. É ele quem lê o enunciado, esbarrando no símbolo $\frac{1}{4}$, símbolo este que é interpretado como "um quarto" por Daniel e tanto este como Amélia parecem perceber o que têm que fazer para resolver o problema. Também no problema 2, Amélia e Daniel parecem não ter muita dificuldade em compreender o enunciado do problema. Percebem o que devem fazer e delineiam uma estratégia geral de resolução que lhes permite chegar à resposta correcta para todas as alíneas. César vai acompanhando os colegas, que em alguns momentos, evidenciam preocupação se ele está ou não a compreender a sua resolução.

RESULTADOS

Conhecimento da linguagem verbal das fracções

Um aspecto que se salienta do trabalho dos alunos é a grande dificuldade no uso da linguagem verbal das fracções. Isso é evidente no seguinte diálogo:

> 1) César (lê o enunciado) – A avó do Luís deu-lhe um chocolate, como aquele que mostra a figura, o Luís decidiu dar... (faz uma expressão admirada ao se deparar com o símbolo $\frac{1}{4}$ e bloqueia)
> 2) Daniel – ... Um quarto.
> 3) César – …Um quarto do chocolate ao seu amigo Ricardo.
> 4) Daniel – Rodrigo!
> 5) Amélia – Rodrigo!

> 6) César – ... Rodrigo. Assinala... Assinala a sombreado a parte do chocolate que o Luís de... de ao... que o Luís de ao Ricardo.
> 7) Amélia – Deu ao Ricardo...
> 8) Daniel – Ya, mas aqui está de...
> 9) Amélia – Pois, mas é deu.
> 10) Daniel – Ya...
> 11) Amélia – Então vá... Então é um quarto, já não me lembro...
> 12) Daniel – Quanto era... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12...

Neste diálogo, na linha 1, César não consegue ler o símbolo $\frac{1}{4}$, símbolo esse que é igualmente desconhecido de Amélia. César lê o enunciado com alguma dificuldade, o que o leva a confundir os nomes dos alunos mencionados na tarefa (diz Rodrigo por Ricardo). Na linha 6, evidencia-se a dificuldade de César em perceber a gralha no enunciado ("de" em vez de "deu"). Esta dificuldade é prontamente resolvida por Amélia, que parece ter alguma "autoridade" junto dos colegas de grupo. Na linha 11, esta aluna retoma o termo "um quarto", aparentemente porque o ouviu anteriormente (linhas 2 e 3), mas já com alguma insegurança. Finalmente, na linha 12, Daniel empreende a leitura do número de divisões da barra de chocolate (o número de partes que compõem o todo), condição necessária para poderem prosseguir com a resolução do problema.

Durante toda a resolução da tarefa (que leva sensivelmente 3 minutos), existem apenas estas três ocorrências de um termo associado às fracções ("um quarto", nas linhas 2, 3 e 11). Aparentemente, Daniel é o único elemento do grupo que mostra saber como traduzir o símbolo $\frac{1}{4}$ em linguagem verbal.

As dificuldades dos alunos no uso da linguagem verbal associada às fracções são ainda mais nítidas na tarefa 2, como se vê durante a leitura do enunciado[29]:

> 7) Amélia – Vá, vamos lá: A Maria tem 60 bombons que quer partilhar com alguns colegas. Deu ah…
> 8) Daniel – Dois terços
> 9) César – Hã? Dois terços? Um terço, não, ai…
> 10) Daniel – Dois terços, sim
> 11) Amélia – Não isto não é dois terços.
> 12) Daniel – Vá, continua… Aos colegas da natação…
> 13) Amélia – Da natação e três qualquer coisa aos colegas da turma. Quantos bombons deu a Maria aos colegas da natação?

Na linha 8, $\frac{1}{2}$ é erradamente lido como "dois terços" por Daniel, a que se segue alguma confusão nos alunos, e, na linha 13, $\frac{1}{3}$ é lido como "três qualquer coisa", evidenciando claramente que os próprios alunos reconhecem as suas dificuldades.

[29] Mantemos a numeração das linhas do episódio, para proporcionar uma melhor percepção do momento em que este ocorreu.

Conhecimento da linguagem simbólica das fracções

Apesar das dificuldades manifestadas no uso do vocabulário associado às fracções, Amélia e Daniel mostram perceber o que fazer com a representação simbólica. Na tarefa 1, tendo identificado o número de partes que compõem o todo, reconhecem que têm de dividir o número obtido pelo denominador. É isso que Daniel começa desde logo por afirmar na linha 15:

> 15) Daniel – 12 a dividir por 4? Este a gente pinta aqui. Sim! Se isto é 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. 12 a dividir por 4?
> 16) Amélia – 12 a dividir por 4...
> 17) Daniel – Dá 4.
> 18) César – 12 a dividir por 4?!
> 19) Amélia – Não, não dá 4.
> 20) César – Não...
> 21) Daniel – Dá 3!
> 22) Amélia – Não.
> 23) Daniel – Então 3 e 3 são 6...
> 24) César – Podemos fazer aqui a conta.
> 25) Daniel – 3 e 3 são 6... 6 + 6 são 12, são 4. Olha já sei o que é.
> 26) César – 4 + 2, 8
> 27) Daniel – Trabalha aqui... 3, 3 + 3, 12
> 28) César – A dividir ou vezes?
> 29) Amélia – É 3, é 3.
> 30) Daniel – É 3, é.
> 31) César – Mas isto é a dividir ou é... ou é...
> 32) Daniel – É a dividir.
> 33) Amélia – Não, é 3 por causa que 12 a dividir por 4 é 3.
> 34) Daniel – 3 + 3 são 6 + 3, 9 +3, 12.
> 35) Amélia – Ya e deu aqui 4... 12

Tendo reconhecido que é necessário dividir 12 por 4, o que merece a concordância de Amélia, é o próprio Daniel quem se confunde a si mesmo dizendo, na linha 17, que o resultado dessa divisão é 4. Isto conduz a alguma confusão no grupo, parecendo os alunos falarem a várias vozes, até que Daniel, na linha 21, parece convencido que realmente o resultado é 3 e Amélia, na linha 29, parece estar já igualmente convencida. Só César ainda hesita, manifestando inclusivamente dúvidas se é necessário dividir ou multiplicar para obter a resposta.

No raciocínio dos alunos parece estar a noção de número racional como operador (aqui temos o operador $\frac{1}{4}$). No entanto, esta noção de operador transforma-se na ideia que é necessário fazer uma divisão. A intervenção de César sugere claramente que não está a pensar em termos de fracções ou números racionais mas sim de operações (na linha 31, pergunta se é de dividir ou de "vezes"), sendo necessário saber qual a operação a seleccionar.

No meio da discussão, Daniel mostra como 12 se pode obter pela soma de quatro quantidades iguais (linha 25). Amélia, pelo seu lado, usa o argumento formal da divisão, para defender a correcção da resposta (linha 33): "é 3 por causa que 12 a dividir por 4 é 3". Ou seja, embora tendo dificuldades em verbalizar a representação simbólica das fracções, os alunos usam esta representação (no caso da fracção $\frac{1}{4}$) com desembaraço, interpretando a fracção como divisão.

Na tarefa 2 a), Amélia e Daniel percebem rapidamente que o problema requer a divisão por 2, e dão a resposta correcta à questão. Preocupam-se com a clareza da resposta ("letra bem feita"). César, pelo seu lado, participa muito pouco ao longo da resolução desta tarefa. O momento de trabalho seguinte começa com uma negociação do modo de trabalhar dentro do grupo:

17) Amélia – Não, mas espera tu não podes ser só tu a pensar, ele também tem, espera…
18) Daniel – sim, sim. Por exemplo…
19) Amélia – Não dos 60 bombons tens que tirar isto.
20) Daniel – Não porque isto aqui é da turma. Deu aos da natação, é este (indica $\frac{1}{2}$).
21) Amélia – Ah, pois é, é este, ya. Então agora temos de ver.
22) Daniel – É 60:2.
23) Amélia – 60:2 claro.
24) César – Mas temos que fazer mesmo a conta.
25) Amélia – Qual é que na tabuada do 2 dá 6… É 3.
26) Daniel – É 30, é 30.
27) Amélia – Dá 30. Ah, ya tínhamos lembrado da metade de 60.
28) Daniel – Ohh.
29) Amélia – Esqueci-me…

Daniel, na linha 20, não usa a expressão "um meio", limitando-se a apontar, mas, na linha 22, mostra saber que se trata de dividir por 2. Os alunos calculam o resultado da divisão 60:2 "fazendo a conta", ou seja, usando o algoritmo (linha 25). No entanto, num momento seguinte evidenciam algum sentido de número – pois conseguem relacionar dividir 60 por 2 com dividir 6 por 2. Finalmente, é de notar que (na linha 27), Amélia fala de "metade", usando aqui um elemento básico fundamental do vocabulário das fracções.

O conceito de explicação matemática

Num momento subsequente da realização da tarefa 1 surge uma interacção interessante entre a professora e o grupo dos três alunos. A professora pede uma explicação para a resposta dada pelos alunos e estes ficam admirados pois pensam que "fazer a conta" seria uma justificação suficiente.

51) Prof. – Olhem meus meninos têm de explicar aqui na primeira porque é que escolheram o 3 e não escolheram outro número qualquer.
52) Amélia – Ah! Então nós tínhamos feito a conta mas a pensávamos que não era preciso pôr.
53) Prof. – É, é. Até para depois quando forem explicar aos colegas, nós depois vamos partilhar aqui (…) vocês se lembrarem como é que pensaram.
54) Amélia – Então Daniel temos de fazer 12:4.
55) Daniel – Por 4, ya.

56) César – Aqui é quanto?
57) Daniel – 12:4.
58) Amélia – Quanto é que na tabuada do… Ai, esquece, já tinhas visto que era o 3. Pronto já está.

Na sequência, os alunos voltam a indicar a conta e a enunciar a resposta, evidenciando que continuam a não perceber que tipo de "explicação" adicional poderá pretender a professora…

E já no final da resolução da tarefa 2, Amélia, enuncia de forma muito clara o seu entendimento do que são as respostas em Matemática, quando diz:

84 Amélia – Não, mas é assim, na Matemática não é preciso respostas completas, não é preciso dizer isso tudo. Na Matemática é mais contas, não é Daniel?

DISCUSSÃO

Como referimos na introdução, este artigo debruça-se sobre a compreensão dos números racionais por parte dos alunos do 5.º ano do ensino básico, tendo em atenção o modo como usam as representações verbal e simbólica (de fracção). Os resultados apresentados neste estudo têm de ser interpretados no contexto dos programas de Matemática portugueses do 1.º ciclo que serviram de base à aprendizagem dos alunos (Ministério da Educação, 1990), que, como referimos, privilegia a representação decimal e circunscreve o trabalho com fracções à noção de operador. Verificamos que, como seria de esperar, os alunos parecem interpretar razoavelmente bem a representação pictórica e que, apesar do significado parte-todo, muito provavelmente, não ter sido objecto de ensino explícito, os alunos parecem ter desenvolvido uma compreensão básica a seu respeito. Além disso, curiosamente, os alunos conseguem interpretar a representação simbólica de operadores fraccionários como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, mas têm muita dificuldade ou não sabem mesmo como os exprimir em termos verbais. Esta dificuldade no uso da representação verbal limita seriamente a compreensão dos alunos dos números racionais, levando-os a desenvolver um significado essencialmente numérico, ligado à ideia de divisão – uma fracção é a indicação de uma "conta" que é necessário fazer, usando, por exemplo, o conhecido algoritmo de papel e lápis. Os alunos associam $\frac{1}{3}$ a uma divisão cujo divisor é o número 3, mas este 3 representa para eles 3 "unidades" e não a divisão de um todo em 3 partes iguais. Deste modo, a compreensão do significado parte-todo está fortemente condicionada por uma ideia mais forte – a visão de fracção como "operação de dividir".

Ambos os problemas apresentados neste artigo têm um contexto que se pode considerar próximo das vivências de alunos desta idade, uma vez que pode ser natural para muitos destes alunos partilharem pedaços de chocolate ou mesmo uma caixa de bombons ou de rebuçados. Geralmente, as crianças começam a "partilhar" desde tenra idade, sem qualquer tipo de conhecimento formal sobre números racionais, fracções ou decimais. Isso pode justificar também o facto de os alunos terem conseguido resolver com sucesso ambos os problemas, sem que, contudo, tenham conseguido verbalizar as fracções apresentadas.

As práticas profissionais dos professores do 1.º ciclo do ensino básico tendem a dar uma grande ênfase a aspectos do simbolismo matemático, ao mesmo tempo que deixam em segundo plano o uso da representação verbal, promovendo o desenvolvimento dos significados de “um meio”, “um terço”, “terça parte”, “um quarto”, “quarta parte”, “um décimo”, “décima parte”, etc. Estas práticas parece terem conduzido os alunos para uma aprendizagem essencialmente processual – alguns deles conseguem resolver determinados tipos de problemas, mas têm dificuldade em explicar o que fizeram e em controlar as suas respostas, mostrando, além disso, em diversos momentos, uma significativa insegurança (é o caso de Amélia e Daniel). Outros mostram grande dificuldade em perceber os próprios enunciados dos problemas e, consequentemente, na sua resolução (como acontece com César). Deste modo, o estudo das práticas profissionais dos professores, para além dos aspectos em que têm sido objecto de atenção (Ponte e Serrazina, 2004), deve igualmente debruçar-se sobre o modo como estes trabalham com as diferentes representações e as inserem nas práticas de comunicação na sala de aula.

CONCLUSÃO

Os resultados deste estudo sugerem grandes dificuldades dos alunos no início do 2.º ciclo na sua compreensão dos números racionais, em particular nas representações verbal e simbólica (fracção). O novo programa de Matemática (Ministério da Educação, 2007) refere a necessidade de trabalhar de forma integrada, durante o 1.º ciclo, as representações de fracção e decimal. Este estudo sugere que existe igualmente uma forte necessidade de trabalhar integradamente com as representações verbal e pictórica, levando todas as representações a apoiar-se mutuamente, de modo a que os alunos compreendam que várias representações podem representar a mesmo objecto (de um certo conjunto numérico), e favorecer o desenvolvimento de um sentido de número racional associado a uma compreensão de ordens de grandeza e de relações entre números, base essencial para uma efectiva compreensão da Matemática nos anos subsequentes.

Salienta-se também a importância de se trabalhar na sala de aula com tarefas que envolvem contextos próximos da realidade dos alunos que favorecem raciocínios intuitivos que, devidamente integrados, os ajudam a construir novos conhecimentos. Deste modo é também possível que a construção de novas representações por parte dos alunos seja feita a partir das suas representações informais, proporcionando o desenvolvimento dos seus recursos para o raciocínio matemático (Webb, Boswinkel e Dekker, 2008).

REFERÊNCIAS

Bishop, A., e Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Charalambous, C. Y., e Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 293-316.

Goldin, G. (2000). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin e D. Shifter (Eds.). *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston, VA: NCTM.

Goldin, G., e Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (NCTM Yearbook 2001, pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park, CA: Sage.

Kieran, C., e Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 179-198). Reston: NCTM.

Lamon, S. (2001). Presenting and representing from fractions to rational numbers. In A. Cuoco (Ed.) *The roles of representation in school mathematics* (NCTM yearbook, 2001, pp. 146-165). Reston, VA: NCTM.

McIntosh, A., Reys, B. J., e Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8 e 44.

Ministério da Educação (1990). *Programa do 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC. (disponível online)

Monteiro, C., e Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89-108.

Monteiro, C., e Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Owens, D. T. (1993). Teaching and learning decimal fractions. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 159-178). Reston: NCTM.

Parker, M., e Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421-481.

Ponte, J. P., e Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., e Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante, 13*(2), 51-74.

Streefland, L. (1991). Fractions, an integrated perspective. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.

Webb, D., Boswinkel, N., e Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in The Middle School, 14*(2), 111-113.

NOTICIAS

Ao décimo sétimo dia do mês de Abril de dois mil e dez, pelas dezoito horas e trinta minutos, realizou-se na sala Caparica B do Hotel Costa da Caparica, a Reunião da Constituição da Sociedade, com a seguinte Ordem de Trabalhos:

1. Informações
2. Discussão e aprovação dos Estatutos
3. Sócios Fundadores
4. Eleição da Comissão Executiva.

Estiveram presentes os elementos que convocaram a reunião, António Domingos, Darlinda Moreira, João Pedro da Ponte, José Manuel Matos, Leonor Santos e Lurdes Serrazina, vários elementos da Comissão Promotora da Sociedade e ainda outras pessoas, sendo que, no conjunto estiveram presentes na reunião cinquenta e duas pessoas.

No cumprimento do número um da ordem de trabalhos Leonor Santos apresentou o ponto da situação relativa à criação da Sociedade bem como os objectivos e natureza da presente reunião.

No cumprimento do número dois da ordem de trabalhos - Discussão e aprovação dos Estatutos - João Pedro da Ponte apresentou a proposta dos estatutos, os quais foram discutidos ponto por ponto, tendo sido todos os pontos aprovados por unanimidade conforme documento que se anexa à presente Acta (anexo II), tendo sido assim aprovados os Estatutos da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM)

No cumprimento do número três da ordem de trabalhos – Sócio Fundadores – e de acordo com os Estatutos aprovados no ponto anterior, constituíram-se como potenciais Sócios Fundadores (uma vez que só o serão aqueles que quando fundada a Sociedade se inscreverem como sócio) todos os presentes que manifestaram a sua vontade, tendo sido ainda esclarecido que todos aqueles que não estando presentes mas pertencentes á Comissão Promotora da Sociedade poderiam ser considerados Sócios Fundadores (lista em anexo).

Finalmente no cumprimento do ponto quatro da ordem de trabalhos - Eleição da Comissão Executiva - Leonor Santos expôs de uma forma breve as várias demarches legais necessárias para a constituição da Sociedade, tendo sido aprovado por unanimidade em votação de braço no ar a Comissão Executiva que é composta pelos seguintes elementos: Ana Paula Canavarro, António Domingos, Darlinda Moreira, João Pedro da Ponte, José Manuel Matos, Leonor Santos e Lurdes Serrazina.